Zusammenstellung

der wichtigsten

arithmetischen und algebraischen Sätze

in

Formel, Wort und Beispiel.

Ein Handbüchlein für den Rechenunterricht

von

G. Wenz.

„Keine Mühe ist vergebens, die einem Andern Mühe ersparen kann."

Lessing.

II. Abteilung:

Die Rechnungsarten für die höheren Lehranstalten.

München.
Theodor Ackermann.
1873.

Zusammenstellung

der wichtigsten

arithmetischen und algebraischen Sätze

in

Formel, Wort und Beispiel.

Ein Handbüchlein für den Rechenunterricht

von

G. Wenz.

„Keine Mühe ist vergebens, die einem
Andern Mühe ersparen kann."

Lessing.

II. Abteilung:

Die Rechnungsarten für die höheren Lehranstalten.

München.

Theodor Ackermann.

1873.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck von C. R. Schurich in München.

Vorbemerkung.

Diese zweite Abteilung, die sich eng an die erste anschließt, kann und soll neben der Zusammenstellung der wichtigsten Rechengesetze und Regeln ein Hilfs- und Nachschlagebuch, ein Vademecum im wahren Sinn des Wortes, sein. Denn sie enthält nicht bloß die nackte, starre Form oder auch nur das erläuternde Wort ohne die Symbolik, sondern sie stellt beides, Wort und Zeichen, neben einander und sucht die dargestellten Sätze noch mit erklärenden Beispielen practisch zu belegen und damit in ihrer Richtigkeit zu beweisen. „Verba docent, exempla trahunt" sind Worte, die auch hier beachtet sein wollen. Die Exempel aber, auf deren Auswahl und Durchführung eine besondere Sorgfalt verwendet wurde, sind gleich den Paradigmen in den Grammatiken anzusehen. Und so möge diese Zusammenstellung der arithmetischen und algebraischen Sätze in Formel, Wort und Beispiel Freunden der Mathematik eine nicht unwillkommene Gabe sein!

Inhalt.

Von den Kettenbrüchen.

Das Kürzen der Brüche geschieht durch die Division des Zählers und Nenners mit ein und derselben Zahl, wenn beide durch diese ohne Rest teilbar sind; also $\frac{8:8}{40:8} = 1/5$. Will man Brüche, die keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, in einer bequemeren d. h. kürzeren Form geben, so kann dies durch Abschätzen geschehen z. B. $\frac{6}{13} = 1/2$. Da $1/2$ den Bruch $6/13$ nicht erschöpft, sondern dessen Wert nur annähernd gibt, so ist $1/2$ in Beziehung zu $6/13$ der Näherungswert. Genauer betrachtet, kommt man auch zu ebendemselben Resultat, wenn man einen solchen Bruch durch den Zähler selbst vereinfacht, also:

$$\frac{6:6}{13:6} = 1/2 \text{ oder genauer } \frac{6:6}{13:6} = \frac{1}{2^1/_6} = \frac{1}{2 + 1/6}.$$

Die letzte, richtigere Form stellt einen Bruch vor, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine ganze Zahl mit einem Bruch ist. Weil nun ein derartig vereinfachter Bruch aus einer Reihe von Brüchen bestehen kann, so nennt man ihn einen Kettenbruch. Die ganzen Zahlen heißen die Quotienten, die sich anreihenden Brüche die Glieder. Die Formel dafür ist:

$$\cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \ldots}}}}$$

Beispiele: $\frac{23}{49} =$

$$\frac{23:23}{49:23} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{3:3}{23:3}} = \cfrac{1}{7 + \cfrac{2:2}{3:2}} = \frac{1}{1 + 1/2}, \text{ also:}$$

$$\frac{23}{49} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Will man einen Kettenbruch wieder auf seinen gewöhnlichen Bruch zurückführen, so geschieht dies einfach dadurch, daß man die gemischten Zahlen, aus denen die Nenner bestehen, nach einander einrichtet und damit jedesmal den Zähler 1 dividiert; also:

$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}}$ gibt den Nenner $2 + 1/6 = \frac{13}{6}$. Zähler $1 : \frac{13}{6} =$ $1 . \frac{6}{13} = \frac{6}{13}$. Oder:

$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$. Nenner $1 + 1/2 = \frac{3}{2}$,

$\cfrac{1}{\frac{3}{2}} = 1 : 3/2 = 2/3$; der Kettenbruch ist jetzt $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + 2/3}}$.

Nenner $7 + 2/3 = \frac{23}{3}$; $\cfrac{1}{\frac{23}{3}} = 1 : \frac{23}{3} = \frac{3}{23}$; der Kettenbruch ist jetzt: $\cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{23}}$. Nenner $2 + \frac{3}{23} = \frac{49}{23}$;

$$\frac{1}{\frac{49}{23}} = 1 : \frac{49}{23} = \frac{23}{49}.$$

Soll ein Kettenbruch nicht ganz, sondern nur zum Teil aufgelöst werden, so bekommt man damit den Näherungswert desselben oder einen Partialbruch.

Von $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + 1/2}}}$ nur $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}$ ausgerechnet, gibt für $\frac{23}{49}$ den Partialbruch: $\frac{7}{15}$. Anwendung finden die Kettenbrüche bei Brüchen oder Verhältnißen, die in möglichst kleinen Zahlen gegeben werden sollen, bei den Lösungen der diophantischen Gleichungen, bei Berechnungen der Umlaufszeiten der Planeten und des Mondes. In der gemeinen Rechenkunst sucht man behufs des Kürzens größerer Brüche nach Art der Kettenbrüche den grösten[1] gemeinschaftlichen Teiler. Der letzte Quotient, der die Teilung ohne Rest endigt, ist alsdann das gemeinschaftliche Maß; z. B. $\frac{429}{637}$

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
429 & 637 & 1 & & \\
 & 429 & & & \\
\hline
 & 208 & 429 & 2 & \\
 & & 416 & & \\
\hline
 & & 13 & 208 & 16 \\
 & & & 13 & \\
\hline
 & & & 78 & \\
 & & & 78 & \\
\hline
 & & & — &
\end{array}$$

Das gröste gemeinschaftliche Maß ist 13.

---

1) grösten analog von besten; denn wie beßer, be(ß)st ist auch größer, grö(ß)st gebildet.

Von den positiven und negativen Zahlen.

4 3 2 1 0 1 2 3 4

$-4 = |—|—|—|—|—|—|—|—| = +4$

Vorstehende Figur gibt im Nullpunct das Zusammentreffen oder auch den Anfang zweier entgegengesetzter Richtungen. Dieselben laßen sich mit rechts und links vergleichen und verhalten sich zu einander wie Ost und West oder Nord und Süd. Die Arithmetik gebraucht für sie zur Unterscheidung die Ausdrücke positiv und negativ und benützt als Charakteristicum für eine positive Zahl das Plus- und für eine negative Zahl das Minuszeichen. Darnach bedeutet $+4$ und -4 nicht: 4 minus 4, sondern: der ersten Größe ist die zweite Größe entgegengesetzt und: rechnen mit positiven und negativen Zahlen hat darnach nichts anderes zu bedeuten als: rechnen mit entgegengesetzten Größen.

Solche entgegengesetzte Größen sind: Vermögen und Schulden, Einnahmen und Ausgaben, Gewinn und Verlust, Wärme und Kälte, Bewegungen nach den Richtungen von rechts und links, aufwärts und abwärts, vor- und rückwärts &c.

Anmerkung: Zur leichtern Auffaßung der folgenden Sätze behalte man obige Figur stets vor Augen oder substituiere den abstracten Zahlen oben angeführte entgegengesetzte Größen als Einnahmen und Ausgaben, z. B. 4 Mark Einn. und 4 Mark Ausg. gleichen sich in 0 aus; also $+4 - 4 = 0$.

$$+(+a) + (+b) + (+c) + (+d) \ldots$$

heißt: Zahlen einer (hier der positiven) Richtung summieren. (Z. B. Einnahmen.)

$$-a + (-b) + (-c) + (-d) \ldots$$

heißt: Zahlen einer (hier der negativen) Richtung summieren. (Z. B. Ausgaben.)

$$+a + (-a) = 0 \text{ oder } -a + (+a) = 0$$

heißt: zwei gleiche Zahlen, davon die eine positiv die andere negativ (oder umgekehrt) ist, ergänzen sich zu 0; also 8 Mark Einnahme und 8 Mark Ausgabe = 0.

$$+5 + (-3) = +2$$

heißt: eine kleinere negative Zahl zu einer größeren positiven gezählt gibt einen Ueberschuß der letztern; 20 Mark Einnahme, 12 Mark Ausgabe, bleiben 8 Mark von der Einnahme.

$-5 + (+3) = -2$

heißt: eine kleinere positive Zahl zu einer größern negativen gezählt gibt einen Ueberschuß der letztern. Vergleiche 8 Mark Einnahme und 20 Mark Ausgabe.

$+7 - (+2) = +5$

heißt: der Unterschied zwischen zwei positiven Zahlen, wovon der Minuend größer als der Subtrahend, ist positiv. Vergleiche: die eine Tageseinnahme sei 7 Mark, die andere 2 Mark, die Differenz zwischen beiden ist 5 Mark Einnahme.

$+7 - (+12) = -5$

heißt: der Unterschied zwischen zwei positiven Zahlen, wovon der Minuend kleiner als der Subtrahend, gibt so viel negative Einheiten als der Subtrahend größer als der Minuend ist. Vergleiche 7 Mark Vermögen, 12 Mark Forderung, so bleibt ein Rest von 5 Mark Schulden.

$-12 - (-7) = -5$

heißt: der Unterschied zwischen zwei negativen Zahlen bleibt negativ, wenn der Minuend größer als der Subtrahend ist. Vergleiche: die eine Tagesausgabe betrage 12 Mark, die andere 7 Mark, die Differenz zwischen beiden ist 5 Mark Ausgabe.

$-7 - (-12) = +5$

heißt: der Unterschied zwischen negativen Zahlen erhält positives Vorzeichen, wenn der Subtrahend größer als der Minuend ist. Vergleiche die beiden Temperaturen 7^0 Kälte und 12^0 Kälte. Die erste Temperatur ist um 5^0 wärmer als die andere.

$+12 - (-7) = +19$

heißt: der Unterschied einer positiven Zahl und einer negativen kleineren Zahl ist gleich der positiven Summe beider Zahlen; denn $+19 + (-7) = +12$. Vergleiche: Bei einer Ausgabe von 7 Mark ist die jetzige Einnahme noch 12 Mark, demnach war die ursprüngliche 19 Mark, denn $+19 + (-7) = +12$.

$-12 - (+7) = -19$

heißt: der Unterschied einer negativen Zahl und einer positiven kleinern Zahl ist gleich der negativen Summe beider Zahlen; denn $-19 + (+7) = -12$. Vergleiche: Wenn die jetzige Ausgabe nur mehr 12 Mark beträgt, weil 7 Mark als Einnahme hinzukamen, so muß die ursprüngliche Ausgabe 19 Mark gewesen sein.

Wenn nun ist

$$[+7-(+2)] = [+7+(-2)] = +5$$
$$[+7-(+12)] = [+7+(-12)] = -5$$
$$[-12-(-7)] = [-12+(+7)] = -5$$
$$[-7-(-12)] = [-7+(+12)] = +5$$
$$[+12-(-7)] = [+12+(+7)] = +19$$
$$[-12-(+7)] = [-12+(-7)] = -19$$

so läßt sich für die 6 Sätze über den Unterschied von den entgegengesetzten Zahlen der *eine* practische Satz aufstellen: *Es wird die Subtraction zur Addition, wenn man dem Subtrahenden das entgegengesetzte Vorzeichen gibt*; welche Regel kurz also ausgesprochen wird: Subtrahieren heißt mit umgekehrten Zeichen addieren.

$12 - 7 + 5$

bedeutet einen Ausdruck, dessen Glieder durch plus und minus verbunden sind. Derselbe wird eine algebraische Summe genannt.

$26 - 12 + 7 = 26 + 7 - 12$

heißt: in einer algebraischen Summe dürfen die Glieder mit ihren Vorzeichen beliebig versetzt werden.

$(+4) \times (+3) = +12$

heißt: zwei positive Zahlen mit einander multipliciert geben ein positives Product.

$(-4) \times (+3) = -12$

heißt: eine negative Zahl durch eine positive multipliciert (oder auch umgekehrt) gibt ein negatives Product; denn $(-4) \times (+3) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$.

$(-4) \times (-3) = +12$

heißt: zwei negative Zahlen mit einander multipliciert geben ein positives Product; denn negativ mal negativ ist so viel als das Entgegengesetzte vom Negativen d. i. das Positive nehmen, also

$(-4) \times (-3) = (+4) + (+4) + (+4) = +12.$

Anmerkung: Als Regel gilt: haben beide Factoren gleiche Vorzeichen, so erhält das Product ein Plus, sind dieselben ungleich, so kommt vor das Produkt ein Minus.

$(+12) : (+3) = +4$

heißt: eine Division mit positiven Zahlen gibt einen positiven Quotienten; denn $(+4) \times (+3) = +12.$

$(+12) : (-3) = -4$ oder $(-12) : (+3) = -4$

heißt: eine Division mit entgegengesetzten Vorzeichen gibt einen negativen Quotienten; denn $(-4) \times (-3) = +12$ oder $(-4) \times (+3) = -12.$

$(-12) : (-3) = +4$

heißt: eine Division mit negativem Dividend und Divisor gibt einen positiven Quotienten; denn

$(+4) \times (-3) = -12.$

Anmerkung: Als Regel gilt auch hier: haben Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, so erhält der Quotient ein Plus, sind dieselben verschieden, so kommt vor den Quotienten ein Minus.

Von der Klammer.

Soll ein Ausdruck, der aus mehreren Gliedern besteht, mit einem andern in Verbindung gebracht werden, so geschieht dies durch das Einschließungszeichen oder die Klammer. Wie dieselbe aufgelöst oder auch angewendet wird, behandeln folgende Beispiele und Sätze.

$12 + (7 - 3 + 6) = 12 + 10$ oder
$12 - (7 - 3 + 6) = 12 - 10$

heißt: ein in einer Klammer stehender Ausdruck wird erst vollständig berechnet, ehe er mit einem andern in Verbindung tritt.

$$12 + (7 - 3 + 6) = 12 + 7 - 3 + 6$$

heißt: eine Klammer mit dem Vorzeichen + (plus) wird aufgelöst, wenn man sie streicht und die Glieder derselben mit ihren Vorzeichen unverändert läßt.

$$12 + 7 - 3 + 6 = 12 + (7 - 3 + 6)$$

heißt: wenn ein Ausdruck, vor dem Plus steht, in eine Klammer gebracht wird, so bleiben den einzelnen Gliedern desselben die gleichen Vorzeichen.

$$12 - (7 - 3 + 6) = 12 - 7 + 3 - 6$$

heißt: eine Klammer mit dem Vorzeichen — (minus) wird aufgelöst, wenn man sie streicht und den in der Klammer stehenden Zahlen das entgegengesetzte Vorzeichen gibt. Den Beweis hiefür liefern die Sätze über die Differenzen bei den positiven und negativen Zahlen.

$$12 - 7 + 3 - 6 = 12 - (+ 7 - 3 + 6)$$

heißt: wenn ein Ausdruck, vor dem Minus steht, in eine Klammer gefaßt wird, so erhalten alle Glieder desselben die gegengesetzten Vorzeichen[1]).

$8 - 2 . 3 = 8 - (2 . 3)$ oder $8 + 6 : 2 = 8 + (6 : 2)$

heißt: zwei Zahlen durch ein Multiplications- oder Divisionszeichen verbunden, müßen als in einer Klammer stehend betrachtet werden. Eine Trennung derselben ist also im Verlauf der Rechnung nicht gestattet.

Von den ganzen Potenzen.

Eine Potenz ist ein Product aus gleichen Factoren und eine Zahl potenzieren heißt, dieselbe so oft mit sich selbst multiplicieren als eine zweite Zahl Einheiten hat; z. B. $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

---

1) $(12 - 5) - (6 - 3) = 12 - 5 - 6 + 3 = (12 + 3) - (6 + 5)$
oder in Zeichen:
$(a - b) - (c - d) = a - b - c + d = (a + d) - (c + b)$
heißt: Differenzen werden von einander subtrahiert, wenn man zum Minuenden der 1ten Differenz den Subtrahenden der 2ten Differenz und zum Minuenden der 2ten Differenz den Subtrahenden der 1ten Differenz addiert und beide Summen von einander subtrahiert.
Diese Regel möge als Zusatz zu dem Abschnitt über die Addition und Subtraction genommen werden.

Die Zahl 2 heißt der Grundfactor oder Dignand, 4 der Exponent und 32 die Potenz. Es läßt sich somit jede Potenz in ein Product aus gleichen Factoren verwandeln z. B. $27 = 3 \times 3 \times 3$; $81 = 9 \times 9$; $64 = 4 \times 4 \times 4$ &c.

$a \,.\, a = a^2$

heißt: eine Potenz vom 2^{ten} Grad oder ein Quadrat.

$a \,.\, a \,.\, a = a^3$

heißt: eine Potenz vom 3^{ten} Grad oder ein Kubus.

$a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.... = a^n$

heißt: eine Potenz vom n^{ten} Grad und wird gelesen a hoch n.[1])

$a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$

heißt: Potenzen mit einerlei Grundfactoren werden multipliciert, wenn man dieselben unverändert läßt und dafür die Exponenten addiert;[2]) also $2^2 \,.\, 2^3 = 2^5$ denn $(2^2 \,.\, 2^3) = (4 \,.\, 8) = 32$ und $2^5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 32$.

$a^{n+m} = a^n \,.\, a^m$

heißt; eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, wenn man sie mit den Summanden einzeln potenziert und die erhaltenen Resultate mit einander multipliciert; also: $3^{2+3} = (3^2 \,.\, 3^3) = (9 \times 27) = 243$.

$a^n : a^m = a^{n-m}$

heißt: Potenzen werden dividiert, wenn man den Dignanden unverändert läßt und den Exponenten des Divisors von dem

1) Merke: a. die Potenz einer positiven Zahl ist allemal wieder eine positive Zahl;
b. die Potenz einer negativen Zahl ist einer positiven oder negativen Zahl gleich, je nachdem der Exponent eine gerade oder ungerade Zahl ist; also $(-a)^2 = -a \,.\, -a = +a^2$; $(-a)^3 = -a \,.\, -a \,.\, -a = +a^2 \,.\, -a = -a^3$ u. s. w.

2) Mit obigem Satze sind folgende Gleichungen in Betracht zu ziehen:
I. $a^{-n} \,.\, a^m = a^{-n+m} = a^{m-n}$
II. $a^n \,.\, a^{-m} = a^{n-m}$
III. $a^{-n} \,.\, a^{-m} = a^{-n-m} = a^{-(n+m)}$.

des Dividenden subtrahiert. Es wird dabei vorausgesetzt, daß der letztere größer als der erste ist;[1]) z. B. $4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2 = 16$; denn $4^5 : 4^3 = (1024 : 64) = 16$.

$$a^{n-m} = a^n : a^m$$

heißt: eine Zahl wird mit einer Differenz potenziert, wenn man sie sowol mit dem Minuenden als Subtrahenden einzeln potenziert und die erhaltenen Resultate alsdann dividiert; also $6^{3-2} = (6^3 : 6^2) = (216 : 36) = 6$.

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

heißt: eine Zahl durch Null potenziert gibt 1; also

$8^0 = 1$; denn $\frac{8^4}{8^4} = 1$.

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

heißt: eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Nenner, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine Potenz ist mit unverändertem Grundfactor und positivem Exponenten; also $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$.[2])

---

1) Sollte diese Voraussetzung nicht stattfinden, so verwandelt man den Quotienten in einen Bruch; z. B. $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n}$, also

$4^3 : 4^5 = \frac{4^3}{4^5} = \frac{64}{1024} = \frac{1}{16}$.

Hiezu sind noch folgende Gleichungen in Erwägung zu ziehen:

I. $a^{-n} : a^m = a^{-n-m} = a^{-(n+m)}$

II. $a^n : a^{-m} = a^{n-(-m)} = a^{n+m}$.

III. $a^{-n} : a^{-m} = a^{-n-(-m)} = a^{-n+m} = a^{m-n}$.

2) Potenzen von der Form a^{m-n} heißen Differenzpotenzen. Es gelten der Hauptsache nach von ihnen dieselben Regeln, wie von den ganzen Potenzen, also:

1. $(a \,.\, b)^{m-n} = a^{m-n} \,.\, b^{m-n}$.

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} = \frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}$

3. $a^{m-n} \,.\, a^{p-q} = a^{(m-n)+(p-q)} = a^{(m+p)-(n+q)}$.

4. $a^{m-n} : a^{p-q} = a^{(m-n)-(p-q)} = a^{(m+q)-(n+p)}$.

5. $(a^{m-n})^{p-q} = a^{(m-n)\,.\,(p-q)} = a^{(mp+nq)-(mq+np)}$.

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

heißt: jeder Bruch, dessen Zähler 1, dessen Nenner aber eine Potenz ist, läßt sich in eine Potenz mit negativem Exponenten verwandeln; also $\frac{1}{343} = 7^{-3}$.

$(a . b)^m = a^m . b^m$

heißt: ein Product wird potenziert, wenn man jeden Factor einzeln potenziert und die dadurch erhaltenen Potenzen miteinander multipliciert; also:
$(3 \times 4)^2 = 3^2 . 4^2 = 9 \times 16 = 144$; denn $12^2 = 144$.

$a^m . b^m = (a . b)^m$

heißt: Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliciert, wenn man die Dignanden multipliciert und dieses Product mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert; also $3^2 . 4^2 = (3 . 4)^2 = 144$.

$(a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a^n : b^n) = \frac{a^n}{b^n}$

heißt: ein Quotient oder Bruch wird potenziert, wenn man Dividend oder Zähler und Divisor oder Nenner potenziert; also $\frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$.

$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = (a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

heißt: Potenzen mit einerlei Exponenten werden dividiert, wenn man die Dignanden dividiert, und den Quotienten oder Bruch auf die verlangte Potenz erhebt; also:

$= 63^2 : 7^2 = \left(\frac{63}{7}\right)^2 = 81.$

$(a^n)^r = a^{nr}$

heißt: eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, wenn

man ihren Exponenten mit dieser Zahl multipliciert; also $(2^3)^2 = 2^6 = 64$, denn $(8)^2 = 64$ [1]).

$a^{nr} = (a^n)^r = (a^r)^n$

heißt: eine Zahl wird durch ein Product potenziert, wenn man sie zuerst mit dem einen und das erhaltene Resultat mit dem andern Factor potenziert. Die Ordnung der Factoren ist gleichgiltig. $2^{2 \times 3} = (2^2)^3 = (4)^3 = 64$.

$0^m = 0$ und

$1^m = 1$

heißt: Null oder 1 durch eine Zahl potenziert gibt immer wieder 0 oder 1; denn $0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$ und $1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

heißt: das Quadrat einer zweigliedrigen Summe besteht aus drei Teilen:

1. aus dem Quadrat des ersten Summanden;

2. aus dem doppelten Product des ersten in den einfachen zweiten Summanden;

3. aus dem Quadrat des zweiten Summanden; z. B. $(20 + 4)^2 = 20^2 + 40 . 4 + 4^2 = 400 + 160 + 16 = 576$.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

heißt: eine dreigliederige Summe von obiger Beschaffenheit läßt sich in das Quadrat von der Summe ihrer Grundfactoren verwandeln; also
$20^2 + 40 . 4 + 4^2 = (20 + 4)^2$.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

heißt: Der Kubus einer zweigliedrigen Summe besteht aus 4 Teilen:

1. aus dem Kubus des ersten Summanden;

2. aus dem dreifachen Quadrat des ersten Summanden multipliciert mit dem zweiten Summanden;

---

1) Hier mögen noch folgende Sätze in Erwägung gezogen werden:
I. $((a^n)^r)^s = a^{nrs}$.
II. $(((a^{-n})^{-r})^{-s})^{-t} = a^{nrst}$.
III. $(((a^{-n})^{-r})^{-s})^t = a^{-nrst}$.

3. aus dem dreifachen ersten Summanden multipliciert mit dem Quadrat des zweiten Summanden;

4. aus dem Kubus des zweiten Summanden; also: $(20 + 4)^3 = 20^3 + 1200 . 4 + 60 . 16 + 4^3 = 8000 + 4800 + 960 + 64 = 13824$.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

heißt: eine viergliedrige Summe von obiger Beschaffenheit läßt sich in den Kubus von der Summe ihrer Grundfactoren verwandeln.

$(a + b) (a — b) = a^2 - b^2$

heißt: die Summe zweier Zahlen in ihre Differenz multipliciert führt auf die Differenz ihrer Quadrate; denn $(6 + 3) (6 — 3) = 6^2 - 3^2 = 27$ wie 9×3 auch 27 ist.

$a^2 — b^2 = (a + b) (a - b)$

heißt: die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Product aus der Summe der beiden Grundfactoren in ihre Differenz; also $81 — 49 = (9 + 7) (9 — 7) = 32$.

$(a^2 — ab + b^2) (a + b) = a^3 + b^3$

heißt: das Product aus der Summe zweier Zahlen und aus der Summe ihrer Quadrate vermindert um das Product der beiden Grundfactoren, ist gleich der Summe von den Kubusen beider Zahlen; also: $(7^2 — 3 . 7 + 3^2) (7 + 3) = 7^3 + 3^3 = 343 + 27$.

$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 — ab + b^2)$

heißt: die Summe zweier Kubuse läßt sich in ein Product verwandeln, welches aus der Summe der beiden Grundfactoren und aus der Summe ihrer Quadrate vermindert um das Product der Grundfactoren besteht, also: $343 + 27 = (7^2 - 3 . 7 + 3^2) (7 + 3)$.

$(a — b) (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

heißt: das Product aus der Differenz zweier Zahlen und aus der Summe ihrer um das Product derselben vermehrten Quadrate ist gleich der Differenz ihrer Kubuse, denn
$(5 — 3) (5^2 + 5 . 3 + 3^2) = 5^3 — 3^3 = 98$.

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

heißt: die Differenz zweier Kubuse läßt sich verwandeln in ein Product aus der Differenz der beiden Grundfactoren und aus der um das Product derselben vermehrten Summe ihrer Quadrate; denn $5^3 - 3^3 = (5 - 3)(5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2) = 2 \times (25 + 15 + 9) = 98$ [1]).

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

heißt: wenn zwei Summen, von denen in der ersten wie in der zweiten Summe ein und dieselbe Zahl immer um eine andere vermehrt ist, mit einander multipliciert werden, so erhält man als Product eine dreigliedrige Summe, bestehend:

1. aus dem Quadrat des gleichen Summanden;
2. aus dem Product desselben in die Summe der ungleichen Summanden und
3. aus dem Product der beiden ungleichen Summanden;

z. B.:

$(x + 5)(x + 7) = x^2 + 12x + 35$

oder

$(x + 12)(x - 14) = x^2 - 2x - 168.$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

heißt: eine dreigliedrige Summe von obiger Beschaffenheit läßt sich in ein Product verwandeln aus dem Grundfactor vermehrt um die eine ungleiche Zahl in den Grundfactor, vermehrt um die andere ungleiche Zahl; also:

$x^2 + 12x + 35 = (x + 5)(x + 7)$

oder

$x^2 - 2x - 168 = (x + 12)(x - 14)$ [2]).

---

1) Vergleiche damit:
$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b).$

2) Vergleiche hiermit auch folgenden Satz:
$ax^2 + bx + c = (ax + c)(x + 1)$, wenn $b = (a + c)$ ist.

Auflösung:

$(ax^2 + bx + c) \cdot a = (ax)^2 + b(ax) + ac.$

Ferner:

$[(ax)^2 + b(ax) + ac] : a = \frac{(ax + c)(ax + a)}{a} =$
$(ax + c)(x + 1)$; denn

Von den Wurzeln.

Das Suchen des Grundfactors einer Potenz geschieht durch das Wurzelausziehen oder Radicieren. Eine Zahl mit einer anderen radicieren heißt somit: eine dritte Zahl finden, welche mit der zweiten potenziert, die erste wieder gibt. Ein ausgezogenes r, der Anfangsbuchstabe von radix, ist Zeichen dieser Rechnungsart.

$$\sqrt[m]{a} = b$$

heißt: radix oder Wurzel aus a ist b. a = Radicand, m = Wurzelexponent, b = Wurzel oder Grundfactor. [1])

$(ax + c)(x + 1) = ax^2 + (a + c)x + c$
und da $(a + c)x = bx$ ist, so ist
$ax^2 + (a + c)x + c = ax^2 + bx + c$.
Z. B.:
$3x^2 + 5x + 2 = (3x + 2)(x + 1)$.
Denn

$$\frac{(3x^2 + 5x + 2) \cdot 3}{3} = \frac{9x^2 + 5(3x) + 6}{3} =$$

$$= \frac{(3x + 2)(3x + 3)}{3} = (3x + 2)(x + 1)$$

und:
$(3x + 2)(x + 1)$ ist wieder $3x^2 + 5x + 2$.

1) Nach Anmerkung 1 unter a und b auf Seite 9 kann ein Wurzelausdruck mit geradem Exponenten ebensowol auf eine positive wie negative Zahl führen. Von $\sqrt[2]{+81}$ kann die Wurzel + 9 oder auch — 9 sein. Es ist darum nötig, hier darauf aufmerksam zu machen, daß obige Sätze nur positive Radicanden und positive Wurzeln im Auge haben. Wurzelausdrücke jedoch mit geradem Exponenten aber negativem Radicanden gehören zu den imaginären (unmöglichen) Größen.

Wie jedoch mit imaginären Größen gerechnet wird, mögen einige Sätze in Zeichen zu erkennen geben:

1) $a\sqrt{-a} = a\sqrt{a}\sqrt{-1}$.

2) $(a + \sqrt{b}\sqrt{-1}) \cdot (a - \sqrt{b}\sqrt{-1}) = a^2 + b$.

3) $a\sqrt{-1} : b\sqrt{-1} = \frac{a}{b}$.

4) $1 : \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$.

5) $a : \sqrt{a}\sqrt{-1} = -\sqrt{a}\sqrt{-1}$.

$b^m = a; \sqrt[m]{a} = b$

heißt: b auf die m te Potenz erhoben gibt a; und: aus a die m te Wurzel gezogen gibt b. Es ist somit das Radicieren die Umkehrung vom Potenzieren, wie die Division die Umkehrung von der Multiplication ist.

$(\sqrt[m]{a})^m = a$

heißt: eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit derselben Zahl radiciert und potenziert; also:

$(\sqrt[2]{81})^2 = 81.$

$\sqrt[m]{(b^m)} = b$

heißt: eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit der nämlichen Zahl potenziert und radiciert; also $9 = \sqrt[2]{(9)^2}$.

$b = \sqrt[m]{(b)^m}$

heißt: jede Zahl ist einer Wurzelgröße gleich, wenn man sie mit ein und derselben Zahl potenziert und radiciert;

$9 = \sqrt[2]{81}$; also $7 \times 9 = 7\sqrt[2]{81} = \sqrt[2]{49 \times 81}$

$= \sqrt[2]{3969} = 63.$

$\sqrt[m]{a \, . \, b} = \sqrt[m]{a} \, . \, \sqrt[m]{b}$

heißt: ein Product wird radiciert, wenn man jeden Factor radiciert; also: $\sqrt[2]{49 \times 81} = \sqrt[2]{49} \, . \, \sqrt[2]{81}.$

$\sqrt[m]{a} \, . \, \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$

heißt: Wurzelgrößen mit einerlei Exponenten werden multipliciert, wenn man die Radicanden multipliciert und aus dem Product die Wurzel zieht; also:

$\sqrt[2]{49} \, . \, \sqrt[2]{81} = \sqrt[2]{49 \times 81} = \sqrt[2]{3969}.$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

heißt: aus einem Quotienten oder Bruch wird die Wurzel gezogen, wenn man Dividend oder Zähler und Divisor oder Nenner einzeln radiciert; also:

$$\sqrt[2]{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt[2]{49}}{\sqrt[2]{81}}.$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

heißt: Wurzelgrößen mit einerlei Exponenten werden dividiert, wenn man die Radicanden dividiert und aus dem Quotienten oder Bruch die Wurzel zieht; also:

$$\frac{\sqrt[2]{49}}{\sqrt[2]{81}} = \sqrt[2]{\frac{49}{81}}.$$

$$\sqrt[m]{a^r} = (\sqrt[m]{a})^r$$

heißt: aus einer Potenz wird die Wurzel gezogen, wenn man den Grundfactor radiciert und die erhaltene Wurzel potenziert; also:

$$\sqrt[2]{9^3} = (\sqrt[2]{9})^3 = 3^3; \text{ denn } \sqrt[2]{9^3} = \sqrt[2]{729} = 27.$$

$$(\sqrt[m]{a})^r = \sqrt[m]{(a^r)}$$

heißt: eine Wurzelgröße wird potenziert, wenn man den Radicanden potenziert und aus der Potenz die Wurzel zieht;

also $(\sqrt[2]{9})^3 = \sqrt[2]{9^3} = \sqrt[2]{729}.$

$$\sqrt[m]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{m}} = a^r$$

heißt: eine Potenz wird radiciert, wenn man den Grund-

factor unverändert läßt und den Exponenten der Potenz durch den der Wurzel dividiert; also: $\sqrt[4]{3^{12}} = 3^3$ [1]).

$$a^r = \sqrt[m]{a^{mr}}$$

heißt: jede Potenz läßt sich in eine Wurzelgröße verwandeln, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem der Wurzel multipliciert; also: $8^3 = \sqrt[2]{8^6}$.

$$\sqrt[m]{a^m} = a^{\frac{m}{m}} = a^1 = a$$

heißt: eine Zahl mit 1 potenziert bleibt ungeändert; also: $10^1 = 10$.

---

1) Hieher gehören die Rechnungen mit den Bruchpotenzen, denn wie $\sqrt[m]{a^{mr}}$ gleich a^r ist, so ist $\sqrt[n]{a^r}$ gleich $a^{\frac{r}{n}}$.

$$a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^r}$$

heißt: eine Potenz mit gebrochenem Exponenten läßt sich in eine Wurzelgröße verwandeln, wenn man den Nenner zum Exponenten der Wurzel und den Zähler zu dem der Potenz macht; also $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$.

Es gelten für die Bruchpotenzen der Hauptsache nach dieselben Regeln, wie für die Potenzen mit ganzen Exponenten; also:

1) $(a \,.\, b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \,.\, b^{\frac{m}{n}}$;

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$;

3) $a^{\frac{m}{n}} \,.\, a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms+nr}{ns}}$;

4) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms-nr}{ns}}$;

5) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{mr}{ns}}$.

$$a^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a^n}$$

heißt: eine Zahl wird durch einen Bruch potenziert, wenn man mit dem Zähler potenziert und mit dem Nenner radiciert.

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

heißt: eine Zahl wird durch ein Product radiciert, wenn man zuerst mit einem Factor radiciert und die erhaltene Wurzel alsdann mit dem andern; also:

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = 2.$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\,.\,n]{a}$$

heißt: eine Wurzel wird durch eine Zahl radiciert, wenn man den Exponenten mit der Zahl multipliciert; also:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64}.$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$$

heißt: die Wurzel aus einer Potenz bleibt ungeändert, wenn beide Exponenten durch ein und dieselbe Zahl multipliciert oder dividiert werden.

Anmerkung: Dieser Satz findet seine praktische Anwendung, wenn man Wurzelgrößen mit verschiedenen Exponenten multiplicieren oder dividieren soll. Man darf in solchem Fall nur dieselben auf gleiche Exponenten bringen und alsdann miteinander multiplicieren oder dividieren nach der Regel Seite 16: $\sqrt[m]{a}\,.\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$;

z. B.: $\sqrt[3]{a^2}\,.\,\sqrt[5]{a^3} = \sqrt[3\,.\,5]{a^{2\,.\,5}}\,.\,\sqrt[5\,.\,3]{a^{3\,.\,3}} = \sqrt[15]{a^{10}}\,.\,\sqrt[15]{a^9} =$
$\sqrt[15]{a^{10}\,.\,a^9} = \sqrt[15]{a^{19}}.$

Oder:

$$\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[15]{a^{10}} : \sqrt[15]{a^9} = \sqrt[15]{a^{10-9}} = \sqrt[15]{a^1}.$$

$$\sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{a \cdot a} = \sqrt[2]{a^2} = a$$

heißt: eine Quadratwurzel mit sich selbst multipliciert gibt wieder den Radicanden; also:

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{9 \cdot 9} = \sqrt{81} = 9;$$

denn:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = \sqrt[m]{a^m} \cdot a^{\frac{m}{m}} = a$$ [1]).

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

heißt: ein Bruch mit dem Nenner $\sqrt{b}$ erhält rationalen Wert, wenn man Zähler und Nenner mit der Wurzelgröße $\sqrt{b}$ multipliciert; also:

$$\frac{27}{\sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3}}{3} = 9\sqrt{3}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a.(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

heißt: der Nenner $\sqrt{b} + \sqrt{c}$ eines Bruches erhält rationalen Wert, wenn man Zähler und Nenner durch $\sqrt{b} - \sqrt{c}$ multipliciert; also:

$$\frac{27}{\sqrt{36} + \sqrt{9}} = \frac{27(\sqrt{36} - \sqrt{9})}{(\sqrt{36} + \sqrt{9})(\sqrt{36} - \sqrt{9})} =$$

$$= \frac{27(\sqrt{36} - \sqrt{9})}{36 - 9} = \frac{27 \cdot 3}{27} = 3;$$ denn

$$\frac{27}{\sqrt{36} + \sqrt{9}} = \frac{27}{9} = 3.$$

---

[1]) Hiermit sind noch folgende Sätze in Vergleich zu bringen:

I. $\sqrt{(a-b)} \times \sqrt{(a-b)} = a-b$

II. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a-b.$

Statt $\sqrt[2]{\ }$ schreibt man kurz $\sqrt{\ }$.

$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$ [1])

heißt: aus einer mehrgliedrigen Wurzelgröße wird die Quadratwurzel nach obiger Formel (d. h. gerade so wie in der Anmerkung unten dargelegt) gezogen.

Für das numerische Ausziehen der Quadratwurzel hat man sich nur noch zu merken, daß die betreffende Zahl von rechts nach links in zweizifferige Klassen abgeteilt wird. (Die letzte Klasse kann auch einzifferig sein). z. B.:

1) $\sqrt{21 \mid 16} = 4$

— a^2 16

—5 | 16 : 2a (= 8) = 6 = b

— 2ab — 48

— 36

— b^2 36

—

$\sqrt{21\ 16} = 46.$

2) $\sqrt{0{,}92 \mid 16} = 0{,}96$

81

11 16 : 18

10 8

— 36

36

—

3) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$

4) $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}8660\ldots$

---

[1]) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a$

$-a^2 = a^2$

— 2ab : 2a = + b

$-b \times 2a = 2ab$

$- b^2$

$-b^2$ $- b^2$

—

$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$$ [1])

heißt: aus einer mehrgliedrigen Wurzelgröße wird nach vorstehender Formel in der Ausführung, wie sie die Anmerkung gibt, die Kubikwurzel gezogen. Die Klassen müssen von rechts nach links dreizifferig genommen werden; also:

$$\begin{array}{lrl}
 & \sqrt[3]{884} & |\ 736 = 9 = a \\
- a^3 & 729 & \\
 & 155 & 736 : 3a^2 (= 243) = 6 = b \\
- b \times 3a^2 & 145 & 8\,.. \\
 & -9 & 93 \\
- b^2 \times 3a & -9 & 72 \\
 & & 216 \\
- b^3 & - & 216 \\
 & & -\,-
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{884\,|\,736} = 96$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{0{,}75} = 0{,}90856$$

$$\sqrt[3]{\frac{343}{512}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{7}{8}.$$

Anmerkung: Solche Wurzelgrößen, die sich nicht vollständig ausziehen laßen, deren Wurzeln daher nur Näherungswerte angeben, heißen irrational; z. B.: $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$ oder

$$\sqrt[3]{5} = 1{,}7099\ldots$$

[1]) $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a$

$$\begin{array}{lllll}
-a^3 & a^3 & & & \\
 & - & 3a^2b : 3a^2 = & + b & \\
-b \times 3a^2 & - & 3a^2b & & \\
 & -\,- & & 3ab^2 & \\
-b^2 \times 3a & - & & 3ab^2 & \\
 & & & - & b^3 \\
-b^3 & & & - & b^3 \\
 & & & & -
\end{array}$$

$$\sqrt{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$$

Von den Logarithmen.

Eine Potenz ist das Product aus einer bestimmten Anzahl gleicher Factoren. Das Auffinden des einen gleichen Factors ist die Aufgabe des Radicierens, welches im vorhergehenden Abschnitt behandelt wurde. Die Menge oder Anzahl der gleichen Factoren, d. h. die Darstellung des Exponenten (wenn nämlich der Wert von einem Factor bekannt ist) bildet das Geschäft des Logarithmierens. Somit ist in Zeichen:

$$1)\quad b \,.\, b \,.\, b \,\ldots\, ^{n\,\text{mal}} = a \text{ (eine Potenz)}$$

$$2)\quad \sqrt[n]{a} = b \text{ (eine Wurzel)}$$

$$3)\quad \frac{a}{b \,.\, b \,.\, b \,\ldots} = n \text{ (ein Logarithmus),}$$

welcher kurz also bezeichnet wird

$$^{b}\log a = n,$$

und in Worten heißt:

der Logarithmus von a in Beziehung auf den Grundfactor b ist n. Darnach versteht man unter einem Logarithmus diejenige dritte Zahl, mit welcher die zweite potenziert die erste wieder gibt; also

$$^{b}\log a = n, \text{ denn } b^{n} = a, \text{ oder}$$

$$^{9}\log 729 = 3, \text{ denn } 9^{3} = 729.$$

Die Zahl a führt den Namen Logarithmand, b Grundzahl oder Basis, n Logarithmus.

$\log (a \,.\, b) = \log a + \log b$

heißt: der Logarithmus eines Products wird erhalten, wenn man die Logarithmen der einzelnen Factoren addiert.

$\log (a : b) = \log a - \log b$

heißt: der Logarithmus eines Quotienten oder Bruches wird erhalten, wenn man den Logarithmus des Divisors (des Nenners) von dem des Dividenden (des Zählers) subtrahiert.

$\log (a^{m}) = m \log a$

heißt: der Logarithmus einer Potenz wird erhalten, wenn man den Logarithmus des Grundfactors oder Dignanden mit dem Exponenten der Potenz multipliciert.

$$\log (\sqrt[m]{a}) = \frac{\log a}{m}$$

heißt: der Logarithmus einer Wurzel wird gefunden, wenn man den Logarithmus des Radicanden durch den Wurzelexponenten dividiert.

Anmerkung: Wie aus vorstehenden Sätzen ersichtlich ist, wird durch das Logarithmieren die Multiplication zur Addition, die Division zur Subtraction, das Potenzieren zum Multiplicieren und das Radicieren zum Dividieren. Auf die Addition oder Subtraction läßt sich das Logarithmieren nicht anwenden.

$$\log \frac{ab^m}{c\sqrt[n]{d^p}} = [\log ab^m - \log c\sqrt[n]{d^p}] = [\log (a + b^m) -$$

$$(\log c + \log \sqrt[n]{d^p})] = [\log a + m \log b - \log c -$$

$$\frac{\log d^p}{n}] = \left[\log a + m \log b - \log c - \frac{p \log d}{n}\right]$$

heißt: den Logarithmus eines zusammenhängenden Ausdrucks findet man, indem man die Logarithmen aller Rechnungsarten sucht, also: jede Multiplication in Addition, jede Division in Subtraction, jede Potenzierung in eine Multiplication und jede Wurzelausziehung in eine Division verwandelt.

Von den Brigg'schen Logarithmen oder den Logarithmen mit der Basis 10.

$\log 10 = 1$
$\log 100 = 2$
$\log 1000 = 3$
$\log 10000 = 4 \ldots.$

heißt: 1, 2, 3, 4 .... sind die Exponenten von 10, 100, 1000, 10000 in Beziehung auf den Grundfactor 10.

$^{10}\log 1 = 0$

heißt: der Logarithmus 1 in Beziehung auf die Basis 10 ist 0; denn $10^0 = 10^{m-m} = \frac{10^m}{10^m} = 1$

$^{10}\log 2 \quad = 0{,}3010300$
$^{10}\log 11 \quad = 1{,}0413927$
$^{10}\log 101 \quad = 2{,}0043214$
$^{10}\log 1001 = 3{,}0004341$

heißt: die Logarithmen der einzelnen Zahlen bestehen aus zwei Teilen: aus Ganzen und einem Bruch. Die Ganzen (die Charakteristik) hängen vom Stellenwert ab und betragen immer um 1 weniger als die gegebene Zahl oder der Numerus Ziffern hat, der Bruch (die Mantisse) hingegen von der Aufeinanderfolge der Zahlen. Ebendeshalb haben ganze Zahlen wie Decimalbrüche mit gleichen Ziffern gleiche Mantisse aber stets ungleiche Charakteristik, z. B. log 425 = 2,6283889 und log 4,25 = 0,6283889 [1]).

$\log 0{,}1 \quad = -1$
$\log 0{,}01 \quad = -2$
$\log 0{,}001 \quad = -3$
$\log 0{,}0001 = -4$

heißt: die Charakteristik eines echten Decimalbruches ist negativ und hat eben so viele negative Einheiten als der Bruch Nullen an der Spitze hat; denn $10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{100}$; $10^{-3} = \frac{1}{1000}$ u. s. f. (Siehe Seite 10).

$\log 0{,}425 = \log 425 - \log 1000 = 2{,}6283889 - 3 = 0{,}6283889 - 1$

heißt: alle negativen Logarithmen pflegt man als Differenzen zu schreiben und zwar so, daß der Minuend eine Null an der Spitze hat.

$\log 0{,}7781513 - \log 2{,}1139434 = \log (2{,}7781513 - 2) - (2{,}1139434)$

heißt: bei größerem Subtrahend als Minuend vermehrt man die Charakteristik um so viele Einheiten, als nötig sind, und zieht sie vom Logarithmus wieder ab; denn 2 — 2 = 0, oder 4 — 4 = 0 u. s. w.

---

1) Benützt wurde das Vega'sche logarithmisch-trigonometrische Handbuch, herausgegeben von Dr. C. Bremiker.

$$\frac{0{,}92536 - 4}{3} = \frac{2{,}92536 - 6}{3}$$

heißt: um einen Logarithmus mit negativer Charakteristik dividieren zu können, vertauscht man dieselbe mit einer solchen, welche ohne Rest teilbar ist; denn 0 — 4 = 2 — 6, 0 — 7 = 1 — 8 u. s. f.

log 3,7050080 = numerus 5070

heißt: der Numerus wird zu einem Logarithmus gefunden, wenn man die Mantisse in den Logarithmentafeln nachschlägt und die Zahl so vielstellig nimmt, als die Charakteristik vermehrt um 1 angibt.

log 1,7050080 = 50,70

heißt: man sucht den Numerus zunächst nach der Mantisse auf und setzt dann, wenn die nebenanstehende Zahl vierstellig sein sollte, ein Komma in der Weise, daß die Ganzen so viele Ziffern erhalten als die Charakteristik verlangt.

Anmerkung: Sobald die Mantisse nicht mit dem Bruch in den Tabellen genau zusammenfällt, nimmt man dafür den zunächstliegenden, z. B. für 2,4638923 nimmt man 2,4638930, welcher auf die Zahl 291 führt.

log 2481 = 3,394628
log 24810 = 4,394628
log 248'100 = 5,394628
log 2·481'000 = 6,394628

heißt: aus dem Logarithmus einer 4= (auch 5=) zifferigen Zahl laßen sich die Logarithmen aller 6=, 7= und mehrzifferigen Zahlen finden, da solche nur in der Charakteristik, die stets um 1 kleiner als die Stellenanzahl ist, verschieden sind. [1])

[1]) Den Logarithmus einer 5stelligen Zahl mit einem Decimalbruch findet man, wenn man die Differenz der Logarithmen von den ganzen Zahlen, zwischen welchen der Bruch liegt, damit multipliciert und dieses Product zu dem Logarithmus der gegebenen ganzen Zahl addiert, z. B. 14728,59

log 14728 =	4,168 1438
log 14729 =	4,168 1733
Differenz =	295.
295 × 0,59 =	174,05
log 14728 =	4,168 1438
+ log 0,59 =	174
log 14728,59 =	4,168 1612

Logarithmus 6,7144639 = Numerus 5181600

heißt: der Numerus zu einer Charakteristik, die größer als 3 oder 4 ist, wird gefunden, wenn man die Zahl durch Anhängen von Nullen auf so viele Stellen bringt als ihr nach der Charakteristik zuzukommen haben; denn
6,7144639 = 4,7144639 + 2 also 51816 × 100 = 5181600. [1])

Zur sichern Orientierung folgen einige Beispiele:

1) 346 × 418 =
log 346 + log 418.
log 346 = 2,5390761
log 418 = 2,6211763
5,1602524
hiezu Numerus: 144628.
[Differenz (240.10) : 300 = 8]

2) 0,016 × 34,23 =
log 0,016 + log 34,23
log 0,016 = 0,2041200 — 2
log 34,23 = 1,5344069
1,7385269 — 2
Numerus: 0,54768.

---

[1]) Soll die Zahl genauer gegeben werden, so findet man die auf die 5te Stelle kommenden Ziffern, indem man mit der Differenz zweier, aufeinanderfolgender Logarithmen die Differenz des gegebenen und des zunächstliegenden kleinern Logarithmus dividiert und zwar eine Stelle weiter, wenn diese Differenz 10 mal, 2 Stellen, wenn sie 100 mal, 3 Stellen, wenn sie 1000 mal genommen wird; also:

Gegebener Logarithmus:	4,5833765
Zunächstliegender Logarithmus:	4,5833688
Differenz:	77

Aufeinanderfolgende Logarithmen sind:
I. 4,5833688
II. 4,5833802
Differenz 114
770 : 114 = 536
500
680
log 4,5833688 = 38315 ...
+ 77 . 1000 : 144 = ...536
38315536
und nach der Charakteristik 4 = 38315,536.

3) 86439 : 35 =

$$\log 86439 - \log 35$$

$$\begin{aligned} \log 86439 &= 4{,}9367097 \\ -\log 35 &= \underline{1{,}5440680} \\ & 3{,}3926417 \end{aligned}$$

Numerus: 2469,685 . . . .

4) 29 : 314 =

$$\log 29 - \log 314 =$$

$$\begin{aligned} \log 29 &= 3{,}4623980 - 2 \\ -\log 314 &= \underline{2{,}4969296} \\ & 0{,}9654684 - 2 \end{aligned}$$

Numerus: 0,092356 . . . .

5) 0,029 : 3,14 =

$$\log 0{,}029 - \log 3{,}14$$

$$\begin{aligned} \log 0{,}029 &= 1{,}4623980 - 3 \\ -\log 3{,}14 &= \underline{0{,}4969296} \\ & 0{,}9654684 - 3 \end{aligned}$$

Numerus: 0,0092356 . . . .

6) $29^4 = 4 \times \log 29$

$$\log 29 = \frac{1{,}4623980}{5{,}8495920} \times 4$$

Numerus: 707281.

7) $0{,}13^5 = 5 \times \log 0{,}13$

$$\log 0{,}13 = \frac{0{,}1139434 - 1}{0{,}5697170 - 5} \times 5$$

Numerus: 0,0000371293.

8) $\sqrt[3]{4096} = \frac{\log 4096}{3}$

$$\log 4096 = \frac{3{,}6123599}{1{,}2041199} : 3$$

Numerus: 16.

9) $\sqrt[4]{0{,}5128} = \frac{\log 0{,}5128}{4}$

$$\log 0{,}5128 = \frac{3{,}7099480 - 4}{0{,}9274870 - 1} : 4$$

Numerus: 0,8462 . . . .

Von den Progressionen oder Reihen.

a) Die arithmetische Progression.

Elemente derselben sind:

1) das erste Glied . . . . . . a
2) die Differenz . . . . . . d
3) die Anzahl der Glieder . . . n
4) das letzte Glied . . . . . . z
5) die Summe aller Glieder . . . s

$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots$

heißt: eine arithmetische Progression ist eine Reihe von Zahlen, die fort und fort um eine constante Zahl wachsen; oder auch:

eine arithmetische Progression ist eine Reihe von Zahlen, in welcher zwei auf einander folgende Zahlen von einander subtrahiert beständig dieselbe Differenz geben; also:

4, 7, 10, 13 .... constanter Zuwachs 3;
$13 - 10 = 3$; $10 - 7 = 3$ .... constante Differenz 3.

$z = a + (n - 1)\, d$

heißt: das letzte Glied einer Reihe wird gefunden, wenn man die um 1 verminderte Gliederzahl mit der Differenz multipliciert und dieses Product zum ersten Glied hinzuzählt; also:

$13 = 4 + (4 - 1)\, 3$

$s = (a + z)\, \frac{n}{2}$

heißt: die Summe aller Glieder wird gefunden, wenn man mit der Hälfte der Anzahl der Glieder die Summe, welche sich aus dem ersten und letzten Glied ergibt, multipliciert[1]); also:

$4 + 7 + 10 + 13 =$

$(4 + 13)\, \frac{4}{2} = 34.$

---

[1]) $s = \frac{[2a + (n-1)d]n}{2}$; also $(8 + 9)\, 4/2 = 34$.

Anmerkung: Durch die beiden letzten Gleichungen ist es möglich, wenn drei Elemente gegeben sind, die fehlenden zwei zu berechnen. Zugleich sei auch noch erwähnt, daß die Summe zweier Glieder, die gleichweit von der Mitte oder von den Enden entfernt sind, stets gleich ist der Summe aus dem ersten und letzten Glied; z. B.: 6, 7, 8, 9, 10, 11, wo $8 + 9 = 10 + 7$ ist, oder: da $8 + 9 = 10 + 7 = 11 + 6$ ist, so ist

$$\begin{array}{ccc} \rightarrow 6 & 7 & 8 \\ 11 & 10 & 9 \leftarrow \\ \hline 17 & 17 & 17 = \end{array}$$

$$3 \times 17 \text{ oder } (6 + 11) \frac{6}{2}.$$

b) Die geometrische Progression.

Elemente derselben sind:

1) das erste Glied . . . . a
2) der Quotient . . . . q
3) die Anzahl der Glieder . . . n
4) das letzte Glied . . . . . . z
5) die Summe aller Glieder . . . s

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

heißt: eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen, die nach einem constanten Multiplum fortschreiten oder auch: eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen, in welcher zwei auf einander folgende Zahlen durch einander dividiert stets denselben Quotienten geben; also:

3, 6, 12, 24 . . . . constantes Multiplum 2

$\frac{24}{12} = 2$, $\frac{12}{6} = 2$ . . . . constanter Quotient 2.

$$z = aq^{n-1}$$

heißt: das letzte Glied einer geometrischen Reihe wird gefunden, wenn man mit der um 1 verminderten Gliederanzahl den Quotienten potenziert und mit dieser Potenz das erste Glied multipliciert; also: $24 = 3 \times 2^{4-1} = 3 \times 8$

$$s = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

heißt: die Summe einer geometrischen Reihe ist zu finden, wenn man das erste Glied mit dem durch die Gliederanzahl

potenzierten, aber um 1 verminderten, Quotienten multipliciert und dieses Product durch den um 1 verkleinerten Quotienten dividiert; also:

$$3 + 6 + 12 + 24 = \frac{3\,(2^4 - 1)}{2 - 1} = 45$$

Anmerkung: Durch die Gleichung $z = aq^{n-1}$ ist die Möglichkeit gegeben, das vierte Element, wenn von a, q, z, n drei bekannt sind, zu finden.[1]) Dabei sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß je drei aufeinander folgende Glieder eine stetige Proportion bilden oder auch, daß jedes Glied zwischen je zwei gleichweit entfernten Gliedern das geometrische Mittel ist; z. B.

$3 + 6 + 12$, wo $6 = \sqrt{3 \,.\, 12}$ ist; oder

$3 + 6 + 12 + 24 + 48$, wo $12 = \sqrt{6 \,.\, 24} = \sqrt{3 \,.\, 48}$ ist.

Von den Zins-, Zinseszins- und Rentenrechnungen.

a) Die einfache Zinsrechnung.

Die Elemente derselben sind:

1) das Normalkapital 100
2) das angelegte Kapital . . . a
3) das angewachsene Kapital . . A
4) die Zeit . . . . n
5) der Zins . . . . z
6) die Procente . . . . . p
7) der Zinsfuß . . . . . q

Anmerkung: Unter Procent hat man den Zins vom Normalkapital auf 1 Jahr, unter Zinsfuß jedoch den Wert des Verhältnißes vom angelegten Kapital zum angewachsenen zu verstehen.

---

[1]) Eine Zusammenstellung der hiezu erforderlichen Gleichungen möge das zeigen:

1) $z = aq^{n-1} = \log z = \log a + (n-1) \log q$

2) $a = \frac{z}{q^{n-1}} = \log a = \log z - (n-1) \log q$

3) $q = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \log q = \frac{\log z - \log a}{n-1}$

4) $n = \frac{\log z - \log a}{\log q} + 1.$

$$z_1 = \frac{a \cdot p}{100}$$

heißt: den Zins auf ein Jahr findet man, wenn man die Procente mit dem angelegten Kapital multipliciert und das erhaltene Product durch das Normalkapital dividiert; also: 650 Mark zu $3^1/_2$%, ? Zins auf 1 Jahr? Antwort:

$$\frac{650 \times 3{,}5}{100} = 22{,}75 \text{ Mark.}$$

$$q = \frac{100 + p}{100}$$

heißt: den Zinsfuß oder den Wert des Verhältnißes vom angelegten zum angewachsenen Kapital findet man aus den Procenten, wenn man zu dem Normalkapital die Procente addiert und diese Summe durch das Normalkapital wieder dividiert; z. B.: Wie groß ist der Zinsfuß bei 5 Procent?

Antwort: $\frac{100 + 5}{100} = 1{,}05$

$$p = 100\,(q - 1)$$

heißt: die Procente findet man aus dem Zinsfuß, wenn man denselben um 1 vermindert und sodann mit dem Normalkapital multipliciert; also: Zinsfuß 1,05; was sind alsdann die Procente? Antwort:

$$p = 100\,(1{,}05 - 1) = 100 \times 0{,}05 = 5$$

$$z_1 = \frac{a}{100} \cdot p = \frac{a \times 100\,(q - 1)}{100} = aq - a$$

heißt: der Jahreszins wird gefunden, wenn man das angelegte Kapital mit dem Zinsfuß multipliciert und ebendieses Kapital vom erhaltenen Product abzieht; also: 650 Mark zu 1,035 Zinsfuß, wie viel Zins? Antwort:

$$650 \times 1{,}035 - 650 = 22{,}75 \text{ Mark.}$$

$$z_n = \frac{a}{100} \cdot np$$

heißt: den Zins für mehrere Jahre findet man, wenn man die Procente mit der Anzahl der Jahre multipliciert und

dieses Product durch das mit 100 dividierte angelegte Kapital noch vervielfältigt.

$$a = \frac{z}{p} \times 100$$

heißt: das angelegte Kapital findet man, wenn man den mit dem Normalkapital vervielfachten Zins durch die Procente dividiert; also: $\frac{22,75 \times 100}{3,5} = 650.$

$$p = \frac{z}{a} \times 100$$

heißt: die Procente werden erhalten, wenn man den mit dem Normalkapital vermehrten Jahreszins durch das angelegte Kapital dividiert; also: $\frac{22,75 \times 100}{650} = 3,5.$

$$A_1 = a + z_1 = a + \frac{a}{100} \cdot p$$

heißt: das angewachsene Kapital für ein Jahr findet man, wenn man das angelegte Kapital und den Jahreszins addiert; also $650 + 22,75 = 650 + \left(\frac{650}{100} \cdot 3,5\right) = 672,75$ Mark.

$$A_1 = \left(a + \frac{a}{100} \cdot p\right) = \left[a \cdot \left(\frac{100 + p}{100}\right)\right]^{1)} = aq$$

heißt: das angewachsene Kapital für ein Jahr erhält man, wenn man das angelegte mit dem Zinsfuß multipliciert; also: $650 \times 1,035 = 672,75.$

$$a = A_1 : q$$

heißt: das angelegte Kapital findet man, wenn man das auf ein Jahr angewachsene Kapital durch den Zinsfuß dividiert; also: $672,75 : 1,035 = 650.$

---

[1]) Aus diesen Gleichungen sind die anderen für A_n leicht zu entwickeln, als: $A_n = a + zn = a + \frac{a}{100} \cdot pn = a \cdot \left(\frac{100 + pn}{100}\right)$; und $a = A_n - zn = A_n : \left(\frac{100 + pn}{100}\right)$

b) Die Zinseszinsrechnung.

Zinseszinsen entstehen, wenn man am Ende eines jeden Jahres den Zins zum Kapital schlägt und ebenfalls verzinst.

$A = aq^n$, $\log A = (\log a + n \log q)$

heißt: der Endwert eines auf Zinseszins ausgeliehenen Kapitals wird erhalten, wenn man das angelegte Kapital mit dem durch die Anzahl der Jahre potenzierten Zinsfuß multipliciert; also: $a = 800$ Mark, $p = 5\,\%$, $n = 12$ Jahre. Wenn $p = 5$ ist, so ist $q = \frac{100 + 5}{100} = 1{,}05$.

Ansatz:

$A = 800 \times 1{,}05^{12} = \log 800 + 12 \log 1{,}05.$

Ausrechnung:

$$\begin{aligned} \log 800 &= 2{,}9030900 \\ 12 \log 1{,}05 &= 0{,}2542716 \\ \hline \log A &= 3{,}1573616 \end{aligned}$$

Numerus: 1436,6851 Mark = A.

$a = A : q^n$, $\log a = (\log A - n \log q)$

heißt: das Anfangskapital wird erhalten, wenn man das angewachsene Kapital durch den mit der Anzahl der Jahre potenzierten Zinsfuß dividiert; also:

$A = 1436{,}6851$, $q = 1{,}05$, $n = 12$.

Ansatz:

$1436{,}6851 : 1{,}05^{12}$.

Ausrechnung:

$\log 1436{,}6851 - 12 \log 1{,}05$

$$\begin{aligned} \log 1436{,}6851 &= 3{,}1573616 \\ - 12 \log 1{,}05 &= 0{,}2542716 \\ \hline \log a &= 2{,}9030900 \end{aligned}$$

Numerus 800 = a.

$q = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$, $\log q = \left(\frac{\log A - \log a}{n}\right)$

heißt: der Zinsfuß wird gefunden, wenn man das End=

kapital durch das Anfangskapital dividiert und diesen Quotienten mit der Anzahl der Jahre radiciert; also:

$$A = 1436{,}6851$$
$$a = 800$$
$$n = 12$$

Ansatz:

$$\sqrt[12]{\frac{1436{,}6851}{800}}$$

Ausrechnung:

$$\frac{\log 1436{,}6851 - \log 800}{12}$$

$$\log 1436{,}6851 = 3{,}1573616$$
$$- \log 800 = 2{,}9030900$$
$$0{,}2542716 : 12$$
$$\log q = 0{,}0211893$$

Numerus: $1{,}05 = q$

und

$$100\,(1{,}05 - 1) = 5 = p.$$

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log q}$$

heißt: die Anzahl der Jahre wird gefunden, wenn man die Differenz zwischen dem Logarithmus vom End- und Anfangskapital durch den Logarithmus des Zinsfußes dividiert; also:

$$A = 1436{,}6851$$
$$a = 800$$
$$q = 1{,}05$$

Ansatz:

$$\frac{\log 1436{,}6851 - \log 800}{\log 1{,}05}$$

Ausrechnung:

$$\log 1436{,}6851 = 3{,}1573616$$
$$\log 800 = 2{,}9030900$$

Differenz zw. $\log A$ und $\log a = 0{,}2542716$

$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$

$0{,}2542716 : 0{,}0211893 = 2542716 : 211893 = 12$

12 Jahre.

(Siehe Anmerkung Seite 43.)

c) Die Rentenrechnung.

Unter Rente versteht man eine in gleichen Terminen (etwa jährlich) mehrmals zu zahlende Summe.

Elemente derselben sind:

1) die Rente . . . . r
2) der Zinsfuß . . . . q
3) Anzahl der Jahre . . . . n
4) der gegenwärtige Wert aller einzelnen Zahlungen . W

$$W = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^n\,(q - 1)}$$

heißt: der gegenwärtige Wert aller einzelnen Zahlungen wird gefunden, wenn man die Rente mit dem durch die Anzahl der Jahre potenzierten Zinsfuß vermindert um 1 multipliciert und das erhaltene Product durch den mit der Jahresanzahl potenzierten Zinsfuß, multipliciert mit dem um 1 verkleinerten Zinsfuß, dividiert; also: $r = 400$, $p = 5$, $n = 10$

Ansatz:

$$W = \frac{400\,(1{,}05^{10} - 1)}{1{,}05^{10}(1{,}05 - 1)}$$

Ausrechnung:

$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$$
$$10 \log 1{,}05 = 0{,}2118930$$
$$\text{Numerus } q^n = 1{,}6289$$
$$\text{Numerus } (q^n - 1) = 0{,}6289$$

$$\log 400 = 2{,}6020600$$
$$+ \log (q^n - 1) = 0{,}7985816 - 1$$
$$2{,}4006416$$
$$- \log q^n = 0{,}2118930$$
$$2{,}1887486$$
$$- \log (q - 1) = 0{,}6989700 - 2$$
$$3{,}4897786$$

Numerus: 3088,7 = W.

$$r = \frac{W\,(q - 1)\,q^n}{q^n - 1}$$

heißt: eine in bestimmten Terminen z. B. jährlich zu beziehende Rente wird gefunden, wenn man den gegenwärtigen Wert durch ein Product, bestehend aus dem durch die Anzahl der Jahre potenzierten Zinsfuße in den um 1 verminderten Zinsfuß, multipliciert und alsdann wieder durch den auf gleiche Weise potenzierten Zinsfuß verkleinert um 1 dividiert; also:
$W = 3088{,}7,\ n = 10,\ q = 1{,}05;$

Ansatz:

$$r = \frac{3088{,}7\,(1{,}05 - 1)\,1{,}05^{10}}{1{,}05^{10} - 1}$$

Ausrechnung:

$$\begin{aligned} \log 3088{,}7 &= 3{,}4897757 \\ + \log (1{,}05 - 1) &= 0{,}6989700 - 2 \\ + \log (1{,}05^{10}) &= 0{,}2118930 \\ & \quad 2{,}4006387 \\ - \log (1{,}05^{10} - 1) &= 0{,}7985816 - 1 \\ \log r &= 2{,}6020571 \end{aligned}$$

Numerus: $400 = r$.

$$n = \frac{\log r - \log\,[r - (q - 1)\,W]}{\log q}$$

heißt: die Anzahl der Jahre (oder der Termine) einer Rente wird gefunden, wenn man vom Logarithmus der Rente den Logarithmus von derjenigen Zahl abzieht, die dadurch entsteht, daß man den gegenwärtigen Wert einer auszuzahlenden Summe mit dem um 1 verminderten Zinsfuß multipliciert und dies Product von der Rente abzieht. Die Differenz beider Logarithmen wird sodann durch den Logarithmus des Zinsfußes dividiert; also:
$r = 400,\ q = 1{,}05,\ W = 3088{,}7$

Ansatz:

$$r - (q - 1)\,W = 400 - 154{,}44 = 245{,}56$$

$$n = \frac{\log 400 - \log 245{,}56}{\log 1{,}05}$$

$$\begin{aligned} \log 400 &= 2{,}6020600 \\ -\log 245{,}56 &= 2{,}3901576 \\ & \ 0{,}2119024 \\ \log 1{,}05 &= 0{,}0211893 \end{aligned} \quad \frac{0{,}2119024}{0{,}0211893} = 10$$

$$10 = n.$$

(Siehe Anmerkung Seite 43.)

$$A = aq^n + \frac{b\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

heißt: der Endwert des auf n Jahre zu Zinseszinsen angelegten Kapitals a, wenn man dasselbe noch jährlich um die Summe b vermehrt, wird nach obiger Formel gefunden; also: a = 400, b = 20, n = 10, q = 1,05;

Ansatz:

$$A = 400 \times 1{,}05^{10} + \frac{20\,(1{,}05^{10} - 1)}{1{,}05 - 1}$$

Ausrechnung:

$$\begin{aligned} \log 400 &= 2{,}6020600 \\ {}^{10}\log 1{,}05 &= 0{,}2118930 \\ & \ 2{,}8139530 \end{aligned}$$

Numerus I = 651,56

$$\begin{aligned} \log 20 &= 1{,}3010300 \\ \log q^n - 1 &= 0{,}7985816 - 1 \\ & \ 1{,}0996116 \\ -\log q - 1 &= 0{,}6989700 - 2 \\ & \ 2{,}4006416 \end{aligned}$$

Numerus II 251,56
hiezu Numerus I 651,56
Summe 903,12 = A.

$$A = aq^n - \frac{b\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

heißt: der Endwert des auf n Jahre zu Zinseszinsen angelegten Kapitals a, wenn man dasselbe jährlich um die Summe b vermindert, wird nach obiger Formel gefunden; also: a = 400, q = 1,05, b = 20, n = 10;

Ansatz:

$$A = 400 \times 1{,}05^{10} - \frac{20\ (1{,}05^{10} - 1)}{1{,}05 - 1}$$

Ausrechnung:

$$\begin{aligned} \log 400 &= 2{,}6020600 \\ + 10 \log 1{,}05 &= 0{,}2118930 \\ &\ 2{,}8139530 \end{aligned}$$

I. Numerus 651,56

$$\begin{aligned} \log 20 &= 1{,}3010300 \\ \log q^n - 1 &= 0{,}7985816 - 1 \\ &\ 1{,}0996116 \\ - \log q - 1 &= 0{,}6989700 - 2 \\ &\ 2{,}4006416 \end{aligned}$$

II. Numerus 251,56

$$651{,}56 - 251{,}56 = 400 = A.$$

$$A = 100\ a\ (q^n - 1) : p$$

heißt: der Endwert einer n mal am Schluße je eines Jahres auf Zinseszinsen gemachten Einlage von a Mark und bei p Procenten ergibt sich nach obiger Formel; also:

$a = 20;\ n = 12;\ p = 5.$

Ansatz:

$$A = 100 \times 20 \times (1{,}05^{12} - 1) : 5$$

Ausrechnung:

$$12 \log 1{,}05 = \frac{0{,}0211893 \times 12}{0{,}2542716}$$

Numerus 1,7958 — 1 = 0,7958

$$\begin{aligned} \log 100 &= 2 \\ + \log 20 &= 1{,}3010300 \\ + \log 0{,}7958 &= 0{,}9008039 - 1 \\ &\ 3{,}2018339 \\ - \log 5 &= 0{,}6989700 \\ &\ 2{,}5028639 \end{aligned}$$

Numerus 318,32 = A.

Von den algebraischen Gleichungen.

Algebraische Gleichungen sind, wie schon in der Einleitung der I. Abteilung bemerkt wurde, Gleichungen mit Unbekannten, die einen bestimmten Wert repräsentieren. Die unbekannte Größe nennt man schlechthin die „Unbekannte" und bezeichnet sie mit einem der letzten Buchstaben, besonders durch x. Je nachdem die Unbekannte in der 1ten, 2ten, 3ten Potenz ꝛc. erscheint, wird die Gleichung als eine vom 1ten, 2ten, 3ten Grad u. s. w. genannt [1]). Die Gleichungen vom 2ten Grad heißen auch quadratische und die vom 3ten Grad kubische Gleichungen. Aufgelöst ist eine Gleichung, wenn der Wert der Unbekannten gefunden ist. Um dies leichter bewerkstelligen zu können, sucht man die bekannten Glieder auf die rechte Seite vom Gleichheitszeichen durch Transposition zu bringen, damit der linken Seite nur mehr die Unbekannte verbleibt. Glieder selbst bilden alle Zahlen durch plus (+) oder minus (—) verbunden; z. B. $6 + 7 - 3 \times 12$ u. s. w. Multiplications- oder Divisionsausdrücke sind nur als ein Glied anzusehen:
$3 \times 7 + 15 : 5 - (2 \times 6) : 3$ u. s. w.

$(x + a = b) = (x + a - a = b - a) = (x = b - a)$

heißt: eine Gleichung bleibt ungeändert, wenn auf beiden Seiten Gleiches subtrahiert wird; also:

$(x + 27 = 39) = (x + 27 - 27 = 39 - 27) = (x = 12)$.

$(x - a = b) = (x - a + a = b + a) = (x = b + a)$

heißt: eine Gleichung bleibt ungeändert, wenn man auf beiden Seiten Gleiches addiert; also:

$(x - 17 = 14) = (x - 17 + 17 = 14 + 17) = (x = 31)$.

Darnach kann man auf der einen Seite ein Glied der Gleichung beliebig weglaßen, wenn man dasselbe auf der andern

---

[1]) Ist die Unbekannte der Exponent einer Potenz oder Wurzel, so heißt eine solche Gleichung eine transcendente; z. B. $9^x = 81$ oder $\sqrt[x]{81} = 9$. Irrational wird ferner eine Gleichung genannt, wenn sich die Unbekannte unter einem Wurzelzeichen oder im Dignanten einer gebrochenen Potenz findet, ist dies nicht der Fall, sodann rational; $\sqrt{2x-3}$ oder $3x^{\frac{2}{5}}$.

Seite mit umgekehrtem Zeichen hinzufügt. Diese Operation heißt man die Transposition oder das Transponieren; also: $(x + a - c = b) = (x = b + c - a)$.

$(x = b) = (ax = ab)$

heißt: eine Gleichung bleibt ungeändert, wenn man beide Seiten durch ein und dieselbe Zahl multipliciert. Eine Zahl durch Multiplication mit einer Buchstabengröße (z. B. der Unbekannten) verbunden, wird deren Coëfficient genannt, also: 15x. Brüche werden durch Multiplication mit dem Hauptnenner weggeschaft; also:

$$(x - 1/3 + \frac{3}{5} = 7) = (15x - 5 + 9 = 105).$$

$$\left(\frac{ax}{a} = \frac{ab}{a}\right) = (x = b)$$

heißt: eine Gleichung bleibt ungeändert, wenn man beide Seiten durch ein und dieselbe Zahl dividiert. Auf diese Weise läßt sich oft eine Gleichung sehr vereinfachen z. B.: $(8x + 32 = 96) = (x + 4 = 12)$.

$(x = b) = (x^m = b^m)$

heißt: eine Gleichung bleibt ungeändert, wenn man beide Seiten durch ein und dieselbe Zahl potenziert; also: $(x = 9) = (x^2 = 81)$.

$(x = b) = (\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{b})$

heißt: eine Gleichung bleibt ungeändert, wenn beide Seiten mit ein und derselben Zahl radiciert werden; also: $(x^2 = 81) = (\sqrt{x^2} = \sqrt{81})$.

Merke: Eine Gleichung bleibt immer richtig, wenn man zu beiden Seiten derselben Gleiches addiert, oder von beiden Seiten Gleiches subtrahiert, oder beide Seiten mit Gleichem multipliciert, oder dividiert, oder potenziert, oder radiciert. Das Sinnbild einer Gleichung bildet eine Wage mit zwei Schalen, bei welcher stets gleiche Veränderung (gleiche Vermehrung oder Verminderung) vorgenommen werden muß, wenn sie im Gleichgewicht erhalten bleiben soll.

$(x = \sqrt{a}) = (x^2 = a)$

heißt: ein Ausdruck wird vom Wurzelzeichen befreit, wenn man beide Seiten mit dem Wurzelexponenten potenziert; denn $(x^2 = (\sqrt{a})^2) = (x^2 = a)$ [1]).

$b^x = a$

$$x = \frac{\log a}{\log b}$$

heißt: der Exponent einer Potenz wird gefunden, wenn man den Logarithmus der Potenz durch den Logarithmus des Dignanden dividiert; also:

$$9^x = 729;\ x = \frac{\log 729}{\log 9} =$$

$$\log 729 = 2{,}8627275$$
$$\log 9 = 0{,}9542425$$
$$2{,}8627275 : 0{,}9542425 = 3$$
$$x = 3.$$

$(\sqrt[x]{a} = b) =$

$$(a = b^x);\ x = \frac{\log a}{\log b}$$

heißt: der Wurzelexponent wird gefunden, wenn man beide Seiten in die gleiche Potenz desselben erhebt und sodann nach obiger Weise verfährt; also: $\sqrt[x]{729} = 9$

$$729 = 9^x.$$

---

1) Zur beßern Orientirung folgt ein zusammengesetztes Beispiel:

$x + \sqrt[3]{a^2x} = b$ durch Transposition,

$\sqrt[3]{a^2x} = b - x$ durch Erheben in die 3te Potenz,

$a^2x = b^3 - 3b^2x + 3bx^2 - x^3$

Durch Wiederholung dieser Operation kann eine Gleichung von allen Wurzelzeichen befreit werden; also:

$\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 21}} - 1 = x$ durch Transposition,

$\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 21}} = x + 1$ durch Quadrierung,

$x^2 + \sqrt{x^2 + 21} = x^2 + 2x + 1$ durch Transposition,

$\sqrt{x^2 + 21} = x^2 - x^2 + 2x + 1 = 2x + 1$ d. Quadrierung,

$x^2 + 21 = 4x^2 + 4x + 1$

$$x = \frac{\log 729}{\log 9} = 3.$$

Das Suchen des Exponenten kommt bei den Zinseszins- und den Rentenrechnungen vor, bei welchen die Anzahl der Jahre durch den Exponenten ausgedrückt wird. Diese Gleichungen gehören somit zu den transcendenten.

Zum beßern Verständniß für die practische Ausführung folgen einige Beispiele, deren genaue Verfolgung in den einzelnen Operationen sehr anzuempfehlen ist. Der Raumersparniß und der leichteren Uebersicht wegen geschehen die Andeutungen für den Gang der Rechnung durch Abkürzungen, die hier mitgeteilt zu werden notwendig erscheint. Somit bedeutet:

A. = Addition; Cff. = Coëfficient; D. = Division; d. = durch, dem, des, der; K. = Kubus; M. = Multiplication; m. = mit; N. = Nenner[1]); Qu. = Quadrat; S. = Subtraction; Tspſ. = Transposition oder Versetzung.

a) Gleichungen vom ersten Grad.

α) Mit einer Unbekannten.

1) $8x + 9x = 187$ d. A. d. Cff.
$17x = 187$ d. D. m. d. Cff.
$x = 11$

2) $4\frac{1}{2}x = x + 14$ d. M. m. d. N.
$9x = 2x + 28$ d. Tspſ.
$(9 - 2)x = 28$ d. D. m. d. Cff.
$x = 4$

3) $\frac{2}{3} - x = x : \frac{2}{3}$ d. Umkehrung d. D. in die M.
$\frac{2}{3} - x = \frac{x \cdot 3}{2}$ d. M. m. d. Hauptnenner (6)
$4 - 6x = 9x$ d. Tspſ.
$4 = 15x$ d. D. m. d. Cff.
$\frac{4}{15} = x.$

4) $(m + n + o)x = a$ d. D. m. d. Cff.[2])
$x = a : (m + n + o).$

---

[1]) Der Ausdruck „Nenner" wird zugleich für den Divisor in Anwendung gebracht.

[2]) Bei Gleichungen mit Buchstabengrößen vertreten die ersten Buchstaben des Alphabets die bekannten Größen.

5) $(m + n)\,x = a + o\,x$ d. Tsps.
$(m + n - o)\,x = a$ d. D. m. d. Eff.
$x = a : (m + n - o)$.

6) $c : (b - ax) = d$ d. M. m. d. N.
$c = (b - ax)\,d = bd - adx$ d. Tsps.
$adx = bd - c$ d. D. m. d. Eff.
$$x = \frac{bd - c}{ad}$$

7) $(ax + b) : c - d = f$ d. Tsps.
$(ax + b) : c = d + f$ d. M. m. d. N.
$(ax + b) = c\,(d + f)$ d. Tsps.
$ax = c\,(d + f) - b$ d. D. m. d. Eff.
$$x = \frac{c\,(d + f) - b}{a}.$$

Nachweis zu Seite 28 der I. Abteilung für die Teilszahlen bei Mischungsrechnungen. Der Preis der beßern Sorte sei a Mark, derjenige der geringern c und die Mittelsorte soll b Mark kosten. In welchem Verhältniß soll bei 1 Pfd. die Mischung vorgenommen werden?

Präparation.

x Pfd. sei die Menge der beßern Sorte. (1 — x) Pfd. verbleibt für die geringere Sorte. ax Mark ist der Preis für die erste und c (1 — x) Mark derjenige für die zweite Sorte. Der Preis beider Sorten kommt in dem Preise der Mittelsorte zusammen, also ist:

$ax + c\,(1 - x) = b \times 1$ d. Auflösung der Klammer
$ax + c - cx = b$ d. Tsps.
$ax - cx = b - c$
$(a - c)\,x = b - c$ d. D. m. d. Eff.
$$x = \frac{b - c}{a - c}.$$

Wenn nun $x = \frac{b - c}{a - c}$ ist, so ist $(1 - x) = 1 - \frac{b - c}{a - c}$ $= \frac{a - c}{a - c} - \frac{b - c}{a - c} = \frac{a - b}{a - c}$. Demnach kommen auf die

beßere Sorte $\frac{b - c}{a - c}$ und auf die geringere Sorte $\frac{a - b}{a - c}$ Teile, und das Verhältniß ist $\frac{b - c}{a - c} : \frac{a - b}{a - c}$, oder, da beide Brüche gleichnamig sind, $b - c : a - b$.

In Zahlen: $a = 1$ Mark, $b = 90$ Pfennig, $c = 70$ Pfennig, also

$$\begin{aligned} 100\,x + 70\,(1 - x) &= 1 \times 90 \\ 100\,x + 70 - 70\,x &= 90 \\ 30\,x &= 90 - 70 \\ x &= \frac{20}{30} \end{aligned}$$

$$x = 20;\ 1 - x = \left(\frac{30}{30} - \frac{20}{30}\right) = \frac{10}{30}$$

und das Teilverhältniß $20 : 10 = (90 - 70) : (100 - 90)$. Vergleiche damit Abteilung I Seite 28.

β) Gleichungen vom ersten Grad mit mehreren Unbekannten.

Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten (x, y, z, u) ist nur dann lösbar, wenn sie auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zurückgeführt wird. Zur Bewerkstelligung dieser Forderung bedient man sich folgender Methoden.

1) Additionsmethode.

$$\begin{array}{rcl} 6\,x - 3\,y &=& 27 \\ x + 3\,y &=& 8 \\ \hline 7\,x &=& 35 \end{array}$$

heißt: die eine Unbekannte wird durch Addition eliminiert oder weggeschafft, wenn sie in beiden Gleichungen gleichen Coëfficienten, aber entgegengesetzte Vorzeichen hat.

$$\begin{array}{rcl} 3\,x + y &=& 20 \\ 2\,x + 5\,y &=& 48 \end{array} \quad \text{d. i.} \quad \begin{array}{rcl} 15\,x + 5\,y &=& 100 \\ \pm 2\,x \pm 5\,y &=& \pm 48 \\ \hline 13\,x &=& 52 \end{array}$$

heißt: den gleichen Coëfficienten sucht man durch Multiplication einer oder beider Gleichungen herzustellen. Sind die

Vorzeichen gleich, so kann man sie in die entgegengesetzten umkehren, weil eine Gleichung, wenn alle Glieder die entgegengesetzten Vorzeichen erhalten, auch dann noch richtig bleibt; also wenn x sollte eliminiert werden:

$$\begin{array}{l} 3x + y = 20 \\ 2x + 5y = 48 \end{array} \text{ d. i. } \begin{array}{r} \pm 6x \pm 2y = \pm 40 \\ 6x + 15y = 144 \\ \hline 13y = 104 \end{array}$$

2) Die Substitutionsmethode.

Aus der Gleichung I

$$\begin{array}{l} \text{I } 3x + y = 20 \\ \text{II } 2x + 5y = 48 \\ \hline \end{array}$$

ist der Wert für

$$y = 20 - 3x.$$

$$2x + 5(20 - 3x) = 29$$

heißt: der gefundene Wert aus der einen Gleichung wird in die zweite an geeigneter Stelle eingesetzt, wodurch statt zwei nur noch eine Unbekannte zu berechnen ist; also:

$$\begin{array}{r} 2x + 5(20 - 3x) = 48 \\ 2x + 100 - 15x = 48 \\ 52 = 13x \end{array}$$

(also dasselbe Resultat wie oben).

3) Die Comparationsmethode.

Aus den Gleichungen

$$\begin{array}{l} \text{I } 3x + y = 20 \\ \text{II } 2x + y = 48 \end{array}$$

sei a) der Wert für y aus der ersten Gleichung und dann b) aus der zweiten zu bestimmen.

a) Wertbestimmung für y aus der Gleichung I

$$3x + y = 20 \text{ d. Tsps.}$$

$$y = 20 - 3x.$$

b) Wertbestimmung für x aus der Gleichung II

$$2x + 5y = 48 \text{ d. Tsps.}$$

$$5y = 48 - 2x \text{ d. D. m. d. Cff.}$$

$$y = \frac{48 - 2x}{5}.$$

$$20 - 3\,x = \frac{48 - 2\,x}{5}$$

heißt: der gefundene Wert für ein und dieselbe Unbekannte wird aus den verschiedenen Gleichungen gesucht und zuletzt einander gegenübergestellt. Die Ausrechnung führt dann zu demselben Resultat, welches nach den beiden andern Methoden erhalten wurde; denn

$$20 - 3\,x = \frac{48 - 2\,x}{5} \text{ d. M. m. d. N.}$$
$$100 - 15\,x = 48 - 2\,x \text{ d. Tspf.}$$
$$52 = 13\,x.$$

Anmerkung 1.: Ist der Wert einer der Unbekannten gefunden, so ist mittelst einer der Gleichungen die andere Unbekannte leicht herauszufinden; z. B. $x = 4$; also:

$$3 \,.\, 4 + y = 20$$
$$y = 8.$$

Anmerkung 2.: Es ist gleichgiltig, welche von den Unbekannten zuerst ausgerechnet werden soll. Dasselbe gilt auch von der Wahl der Methoden. Nur sei bemerkt, daß sich bei manchen Aufgaben zugleich zwei oder alle drei mit Vorteil anwenden lassen. Es sind aber ebenso viele Gleichungen nötig als Unbekannte vorhanden sind; z. B.:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 2\,x & - & 3\,y & + & 5\,z & = & 7 \\ \text{II} & -6\,x & + & 11\,y & + & 3\,z & = & 41 \\ \text{III} & 5\,x & - & 6\,y & + & 13\,z & = & 25. \end{array}$$

Aus Gleichung I und II läßt sich x durch die Additionsmethode mittelst der Multiplication mit 3 eliminieren:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & +6\,x & - & 9\,y & + & 15\,z & = & 21 \\ \text{II} & -6\,x & + & 11\,y & + & 3\,z & = & 41 \\ \hline \alpha) & & & 2\,y & + & 18\,z & = & 62. \end{array}$$

Aus Gleichung II und III wird x mittelst der Additionsmethode durch die Multiplication entfernt:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{II} & -30\,x & + & 55\,y & + & 15\,z & = & 205 \\ \text{III} & +30\,x & - & 36\,y & + & 78\,z & = & 150 \\ \hline \beta) & & & 19\,y & + & 93\,z & = & 355. \end{array}$$

Dadurch sind die 3 Gleichungen auf 2 reduciert, nämlich auf

$$\alpha)\quad 2\,y + 18\,z = 62$$
$$\beta)\quad 19\,y + 93\,z = 355.$$

Wählt man nun die Comparationsmethode, so muß für eine der Unbekannten (hier sei's für y) der Wert aus beiden Gleichungen gesucht werden; also erstens aus Gleichung α:

$2\,y + 18\,z = 62$ d. Tspſ.
$2\,y = 62 - 18\,z$ d. D. m. d. Cff.
$$y = \frac{62 - 18\,z}{2}$$

zweitens aus Gleichung β:

$19\,y + 93\,z = 355$ d. Tsp.
$19\,y = 355 - 93\,z$ d. D. m. d. Cff.
$$y = \frac{355 - 93\,z}{19}.$$

Durch die Comparation der für y gefundenen Werthe ist

$\frac{62 - 18\,z}{2} = \frac{355 - 92\,z}{19}$ d. M. m. d. Hauptnenner 38.
$1178 - 342\,z = 710 - 186\,z$ d. Tspſ.
$1178 - 710 = (342 - 186)\,z$ d. S.
$468 = 156\,z$ d. D. m. d. Cff.
$3 = z$

Durch die Bestimmung von z ist leicht herauszufinden, daß $x = 2$ und $y = 4$ ist.

b) Quadratische Gleichungen oder Gleichungen vom 2ten Grad.

α) Die reinquadratischen Gleichungen.

Bei einer rein quadratischen Gleichung kommt die *Unbekannte* nur in der 2ten Potenz vor.

$x^2 = c$
$x = \pm\sqrt{c}$

heißt: die Unbekannte wird gefunden, wenn man aus der bekannten Zahl die Quadratwurzel auszieht. Die Wurzel erhält als Vorzeichen plus und minus, weil das Quadrat das Product sowol einer positiven als auch einer negativen Zahl sein kann.

Nach dem pythagoräischen Lehrsatz ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten. Demnach läßt sich beim rechtwinkligen Dreieck stets eine Seite finden, wenn die Länge von jeder der beiden andern bekannt ist; z. B.

1) Gesucht sei die Hypotenuse a, wenn die beiden Katheten b und c bekannt sind:

$a^2 = b^2 + c^2$ d. Radicieren
$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$

2) Gesucht werde Kathete b, bekannt sei Hypotenuse a und Kathete c; also:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ d. Tsp.}$$
$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ d. Radicieren}$$
$$\sqrt{a^2 - c^2} = b.$$

3) Gesucht werde Kathete c, bekannt sei Hypotenuse a und Kathete b, also:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ d. Tspf.}$$
$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ d. Radicieren}$$
$$\sqrt{a^2 - b^2} = c.$$

β) Die unreinquadratischen Gleichungen.

Wenn die Unbekannte in ein und derselben Gleichung sowol in der zweiten als der ersten Potenz vorkommt, wird sie eine unreinquadratische genannt; z. B. $x^2 + ax = b$.

$(x^2 + ax = b) = (x^2 + ax + {}^1/_4 a^2 = b + {}^1/_4 a^2)$

heißt: eine unreinquadratische Gleichung wird auflösbar, indem man den halben Coëfficienten von x ins Quadrat erhebt und beiden Seiten (nach der Regel: eine Gleichung bleibt ungeändert, wenn man auf beiden Seiten Gleiches addiert) zuzählt. Den Nachweis hiefür liefert die Quadrierung einer zweiteiligen Summe, die allemal dreigliedrig wird. Denn $(x + a)^2 = x^2 + 2\,ax + a^2$. a^2 ist aber das Quadrat aus der Hälfte von 2a. Damit ist bezeugt, wie sich eine unreinquadratische Gleichung in eine reinquadratische umbilden läßt.

$(3\,x^2 + 6ax = 9) = (x^2 + 2ax = 3)$

heißt: der Coëfficient von x^2 wird weggeschafft, indem man durch denselben alle Glieder der Gleichung dividiert.

$(x^2 + ax + {}^1/_4 a^2) = [x^2 + ({}^1/_2 a + {}^1/_2 a)\,x + {}^1/_2 a\,.\,{}^1/_2 a] = (x + {}^1/_2 a)\,(x + {}^1/_2 a)$

heißt: ein zum vollständigen Quadrat ergänzter Ausdruck läßt sich in ein Product verwandeln, dessen Factoren eine zweiteilige Summe bilden. Vergleiche damit Seite 14: $[x^2 + (a + b)\,x + ab] = (x + a)\,(x + b)$.

$(x + \frac{1}{2}a)\ (x + \frac{1}{2}a) = (x + \frac{1}{2}a)^2$

heißt: eine zweiteilige Summe mit sich selbst multipliciert ist ihrer Quadrierung gleich.

$\sqrt{(x + \frac{1}{2}a)^2} = (x + \frac{1}{2}a)$

heißt: der Grundfactor eines Quadrats wird durch das Radicieren gefunden und ergibt sich nach obiger Entwicklung, denn: $(x^2 + ax + \frac{1}{4}a) = [x^2 + (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a)\,x + \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a]$
$= (x + \frac{1}{2}a)\ (x + \frac{1}{2}a)$.

Einige Beispiele mögen zu genauerer Orientierung folgen.

1) $x^2 - 18x = 40$ d. Erg. zum v. Qu.

$x^2 - 18x + (-9^2) = 40 + 81$ d. Radicieren

$$\sqrt{x^2 - 18x + 81} = \sqrt{121}$$

$$x - 9 = \pm 11$$

$$x = 9 \pm 11.$$

Anmerkung: $x - 9$ erhält man aus der Entwicklung:
$x^2 - 18x + 81 = [x^2 - (9 + 9)\,x + (-9 \times -9)] = (x - 9)\,(x - 9)$.

2) $ax^2 + bx = c$ d. D. m. d. Eff.

$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$ d. Erg. z. v. Qu.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{4ac + b^2}}{2a}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}.$$

Anmerkung: $x + \frac{b}{2a}$ erhält man durch die Entwicklung

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left[x^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)\right] =$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)\left(x + \frac{1}{2}\frac{b}{a}\right); \text{ und } \frac{\sqrt{4ac + b^2}}{2a} =$$

$$\sqrt{\frac{(4ac + b^2) \times 1}{4a^2}} = \frac{\sqrt{(4ac + b^2)} \times \sqrt{1}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{1.\sqrt{(4ac + b^2)}}{2a}.$$

Folgende zwei Beispiele versuche man in ihrer Auflösung nach oben angedeuteter Weise zu entwickeln:

3) $\sqrt{3x + 1} + 3\sqrt{x} = 5$

$$\sqrt{3x + 1} = 5 - 3\sqrt{x}$$

$$3x + 1 = (5 - 3\sqrt{x})^2$$

$$3x + 1 = 25 - 30\sqrt{x} + 9x$$

$$30\sqrt{x} = 24 + 6x$$

$$5\sqrt{x} = x + 4$$

$$25x = x^2 + 8x + 16$$

$$-16 = x^2 - 17x$$

$$-16 + \left(-\frac{17}{2}\right)^2 = x^2 - 17x + \left(-\frac{17}{2}\right)^2$$

$$-16 + \frac{289}{4} = x^2 - 17x + \frac{289}{4}$$

$$\frac{225}{4} = x^2 - 17x + \frac{289}{4}$$

$$\sqrt{\frac{225}{4}} = \sqrt{x^2 - 17x + \frac{289}{4}}$$

$$\pm\frac{15}{2} = x - \frac{17}{2}$$

$$\frac{17 \pm 15}{2} = x, \text{ also } 16 \text{ oder } 1.$$

4) $\sqrt{x + 7} = 1 + \sqrt{2x}$

$$x + 7 = (1 + \sqrt{2x})^2$$
$$x + 7 = 1 + 2\sqrt{2x} + 2x$$
$$6 = x + 2\sqrt{2x}$$
$$6 - x = 2\sqrt{2x}$$
$$(6 - x)^2 = (2\sqrt{2x})^2$$
$$36 - 12x + x^2 = 8x$$
$$x^2 - 20x = -36$$
$$x^2 - 20x + 100 = 64$$
$$\sqrt{x^2 - 20x + 100} = \sqrt{64}$$
$$x - 10 = \pm 8$$
$$x = 10 \pm 8, \text{ alſo } 18 \text{ oder } 2.$$

Quadratiſche Gleichungen mit mehreren Unbekannten ſucht man zumeiſt nach der Subſtitutionsmethode zu löſen; alſo:

$$x + 2y = 8$$
$$x^2 + y^2 = 13.$$

a) Die Wertbeſtimmung von x aus Gleichung I.

$$x + 2y = 8$$
$$x = 8 - 2y.$$

b) Die Subſtitution des Wertes von x in die Gleichung II.

$$(8 - 2y)^2 + y^2 = 13 \quad \text{d. Erh. ins Qu.}$$
$$64 - 32y + 4y^2 + y^2 = 13 \quad \text{d. Tspſ.}$$
$$5y^2 - 32y = -51 \quad \text{d. Erg. z. v. Qu.}$$
$$y^2 - \frac{32}{5}y + \left(-\frac{16}{5}\right)^2 = -\frac{51}{5} + \left(-\frac{16}{5}\right)^2$$
$$y^2 - \frac{32}{5}y + \frac{256}{25} = \frac{1}{25} \quad \text{d. Radicieren.}$$

$$\sqrt{y^2 - \frac{32}{5}y + \frac{256}{25}} = \sqrt{\frac{1}{25}}$$

$$y - \frac{16}{5} = \pm \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{16}{5} \pm 1/5 \text{ d. i. } 3\,2/5 \text{ oder } 3.$$

Von den unbestimmten oder diophantischen Gleichungen.

$ax \pm by = \pm c$

heißt: eine unbestimmte oder diophantische Gleichung, bei welcher zwei Unbekannte in einer einzigen Gleichung gegeben sind und beide ganze Zahlen vorzustellen haben [1]).

$(ax - by = \pm 1) = (a\gamma - b\delta = \pm 1)$

heißt: eine diophantische Gleichung findet ihre Lösung, wenn man für x und y die Werte γ und δ einsetzt. Zu denselben gelangt man, wenn man b durch a oder auch a durch b dividiert und den dadurch entstandenen echten Bruch in einen Kettenbruch umwandelt. Im zweiten Fall (also bei a : b) subtrahiert man von dem vollständigen Bruch den unmittelbar vorhergehenden Partialbruch, umgekehrt geschieht dies bei der ersten Division (d. i. bei b : a). Ist z. B. der Partialbruch $\frac{\gamma}{\delta}$, so ist $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{b}{a}$ $= \left(\frac{a\gamma - b\delta}{a\delta} = \frac{\pm 1}{a\delta}\right)$. Durch die Multiplication mit dem Hauptnenner erhält man die Gleichung in ganzen Zahlen und die gegebene Gleichung $ax - by = \pm 1$ verwandelt sich sodann in $a\gamma - b\delta = \pm 1$.

---

1) Sollten die Coëfficienten a und b einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so muß derselbe auch in c aufgehen nach der Regel: wenn zwei Zahlen durch eine dritte Zahl teilbar sind, so ist ihre Summe wie ihre Differenz durch dieselbe Zahl teilbar; z. B.: 20 + 32 sind durch 4 zu teilen, also auch 52 oder 12. Im andern Fall ist eine Lösung solcher Gleichungen in ganzen Zahlen unmöglich.

Ein Beispiel in Zahlen:

$$7x - 17y = +1$$

$$\frac{7}{17} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 1/3}}$$

1ter P. Br.: $1/_2$, 2ter P. Br.: $= \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 2/5$

$$\frac{7}{17} - 2/5 = 7 . 5 - 17 . 2 = +1$$

oder

$$17x - 7y = +1$$

$$17 . 2 - 7 . 5 = -1.$$

Anmerkung: Stimmt die Gleichung durch die Auflösung von x und y in die Werte γ und δ mit dem Vorzeichen vor 1 überein, so ist $x = \gamma$ und $y = \delta$; ist dies jedoch nicht der Fall, so ist $x = -\gamma$ und $y = -\delta$ zu nehmen.

$$(ax + by = \pm 1) = (a\gamma - b\delta = \pm 1)$$

heißt: die Auflösung vorstehender Gleichung wird ebenfalls nach obiger Entwicklung durchgeführt. Es ist dabei nur zu beachten, daß, wenn die Gleichung in dem Vorzeichen vor 1 mit der gegebenen übereinstimmt, $x = +\gamma$ und $y = -\delta$, wenn nicht $x = -\gamma$ und $y = +\delta$ ist; also:

$$35x + 26y = +1$$

$$35 . 3 - 26 . 4 = +1$$

folglich:

$$x = +3 \text{ und } y = -4$$

aber

$$26x + 35y = +1$$

$$26 . 4 - 35 . 3 = -1$$

folglich

$$x = -4 \text{ und } y = +3.$$

$$(ax \pm by = \pm c) = \left(a\frac{x}{c} - b\frac{y}{c} = \frac{c}{c}\right) . c = (ax' - by' = 1) . c$$

heißt: steht für 1 eine andere Zahl, so wird die Gleichung durch die Division mit eben dieser Zahl auf 1 zurück geführt

und die für x' und y' erhaltenen Werte durch diese Zahl wieder multipliciert; also:

$$27x - 8y = 7 =$$

$$27\frac{x}{7} - 8\frac{y}{7} = \frac{7}{7} =$$

$$27x' - 8y' = 1$$

$$\frac{8}{27} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{8}{27}$$

$$27 . 3 - 8 . 10 = 1$$

folglich

$$x' = 3 \text{ und } y' = 10$$

also

$$x = 7 . 3 \text{ und } y = 7 . 10$$

und

$$27 . 21 - 8 . 70 = 7.$$

$$(a\gamma - b\delta = \pm c) = [a(\gamma \pm nb) - b(\delta \pm na) = \pm c]$$

heißt: wenn $x = \gamma$ und $y = \delta$ ist, so erhält man neue Auflösungen, wenn man zum Werte von x den Coëfficienten von y und zum Werte von y den Coëfficienten von x gleichvielmal addiert oder subtrahiert. Der Beweis läßt sich durch die Auflösung der Klammer darbringen:

$$a(\gamma + nb) - b(\delta + na) = \pm c =$$

$$a\gamma + nab - b\delta - nab = \pm c =$$

$$a\gamma - b\delta = \pm c.$$

In Zahlen:

$$7x - 17y = 1$$

$$7 . 5 - 17 . 2 = 1$$

$$\begin{aligned} x &= 5 & y &= 2 \\ &= 5 + 17 & &= 2 + 7 \\ &= 5 + 34 & &= 2 + 14 \\ &= 5 + 51 & &= 2 + 21 \\ &= 5 + n17 & &= 2 + n7 \end{aligned}$$

oder

$$
\begin{aligned}
x &= 5 & y &= 2 \\
&= 5 - 17 & &= 2 - 7 \\
&= 5 - 34 & &= 2 - 14 \\
&= 5 - 51 & &\, 2 - 21 \\
&= 5 - n17 & &\, 2 - n7.
\end{aligned}
$$

$$(a\gamma + b\delta = \pm c) = [a(\gamma \pm nb) + b(\delta \mp na) = \pm c]$$

heißt: wenn $x = \gamma$ und $y = \delta$ ist, so kommt man auf neue Lösungen, wenn man zu dem Werte von x den Coëfficienten von y wiederholt addiert und von dem Werte von y den Coëfficienten von x ebenso vielmal subtrahiert, oder auch, wenn man das Verfahren umkehrt; denn

$$
\begin{aligned}
a(\gamma + nb) + b(\delta - na) &= \pm c = \\
a\gamma + nab + b\delta - nab &= \pm c = \\
a\gamma + b\delta &= \pm c.
\end{aligned}
$$

In Zahlen:

$$35x + 26y = 1$$

$$35 \cdot 3 + 26 \cdot -4 = 1$$

also:

$$
\begin{aligned}
x &= 3 & y &= -4 \\
&= 3 + 26 & &= -4 - 35 \\
&= 3 + 52 & &= -4 - 70 \\
&= 3 + n26 & &= -4 - n35
\end{aligned}
$$

oder:

$$
\begin{aligned}
x &= 3 & y &= -4 \\
&= 3 - 26 & &= -4 + 35 \\
&= 3 - 52 & &= -4 + 70 \\
&= 3 - n26 & &= -4 + n35.
\end{aligned}
$$

Den Schluß mögen 2 practische Beispiele bilden.

1) 109 fl. sind mit Thalern und Kronenthalern zu bezahlen, wie viele Stücke sind von jeder Sorte nötig?

1 Krthlr. = 54 Groschen, 1 Thlr. = 35 Gr.,

109 fl. = 2180 Gr.

x Krthlr. = $x \times 54$ Gr. und y Thlr. = $y \times 35$

also:

$$54x + 35y = 2180$$

$54x + 35y = 54 \times 40 + 20$ d. Tspf.[1])

$$54x + 35y - 54 \times 40 = 20$$

$54\,(x - 40) + 35y = 20$ [2]) d. Substitution

$54t + 35y = 20$ d. D. m. 20

$54 \frac{t}{20} + 55 \frac{y}{20} = 1$ oder

$$54t' - 35y' = 1.$$

(Der dem vollständigen Bruch unmittelbar vorhergehende Partialbruch ist $\frac{11}{17}$) also:

$$\frac{11}{17} - \frac{35}{54} =$$

$$54 \times 11 - 35 \times 17 = -1$$

also:

$$t' = -11,\ t = -220,$$

$$-220 = x - 40;\ -180 = x$$

$$y' = 17;\ y = 340$$

$x = -180 \qquad\qquad y = 340$

$ = -180 + 6\,.\,35 \qquad = 340 - 6\,.\,54$

$ = 30$ Krthlr. $\qquad\qquad = 16$ Prßthlr.

2) 100 fl. sollen mit Kronenthalern, Thalern und Sechsern bezahlt werden, doch so, daß sämmtliche Geldstücke gerade die Zahl 100 ausmachen.

x Krthlr. à 54 Gr., y Thlr. à 35 Gr.

---

1) Durch Zerfällung einer großen Zahl in Factoren, von denen einer stets der Coëfficient von x oder y zu sein hat, läßt sich die Aufgabe sehr vereinfachen und die Berechnung erleichtern.

2) t sei gleich dem zusammengesetzten Ausdruck (x — 40).

$$54x + 35y + 2\,(100 - x - y) = 100\,.\,20$$
$$54x + 35y + 200 - 2x - 2y = 2000$$
$$52x + 33y = 1800 = (33\,.\,54 + 18)$$
$$52x + 33\,(y - 54) = 18$$
$$52x + 33t = 18$$
$$52x' + 33t' = 1.$$

(Der dem vollständigen Bruch unmittelbar vorhergehende Partialbruch ist $\frac{7}{11}$)

$$52\,.\,7 - 33\,.\,11 = 1$$
$$x' = 7 \qquad t' = -11$$
$$x = 126 \qquad t = -198$$
$$y - 54 = -198$$
$$y = -144$$
$$x = 126 - 33n \qquad y = 52n - 144$$
$$= 126 - 99 \qquad y = 156 - 144$$

27 Krthlr., 12 Thlr. und 61 Sechser —; zusammen also 100 Stücke im Werte von 100 fl.

Druck von C. R. Schurich in München.

Druck von C. R. Schurich in München.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wenz, G.

Zusammenstellung der wichtigsten arithmetischen und algebraischen Sätze in Formel, Wort und Beispiel ein Handbüchlein für den Rechenunterricht

Bd.: II

München 1873

Math.p. 636 e-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11160389-8